De houdbaarheid van Kurt Gödel's wiskundige intuïtie

Opleiding: Voltijd bachelor Wijsbegeerte, Erasmus Universiteit Rotterdam

Leerstoelgroep: Theoretische Filosofie

Student(nummer): Hugo Hogenbirk, 360574

Studiepunten: 10 ECTS

Datum afstuderen: 15 juni 2015

Begeleider: Prof. dr. H. C. M. de Swart

Adviseur: Dr. Paul Schuurman

Aantal woorden: 12.500

Inhoudsopgave:

Lijst met afkortingen:

$\mathbb{N}$	=	Natuurlijke getallen
$\mathbb{R}$	=	Reële getallen
$\mathbb{N}_{\text{oneven}}$	=	De oneven natuurlijke getallen
SEP	=	Stanford Encyclopedia of Philosophy
ZF(C)	=	Zermelo Fraenkel axioms of set theory (with axiom of choice)

Inleiding

Wiskunde heeft filosofen al eeuwenlang beziggehouden en nog steeds bestaat er een levendig onderzoek binnen de filosofie naar dit onderwerp. Een belangrijk onderdeel van deze 'filosofie van de wiskunde', is de ontologie van de wiskunde. In de ontologie van de wiskunde vindt men vragen als: 'wat is een getal?', 'over wat/welke dingen gaat wiskunde?' en 'gaat wiskunde over dingen?'. Een mogelijk antwoord op deze vragen is dat van het platonisme, namelijk dat wiskunde gaat over objecten die abstract en onafhankelijk zijn van het menselijk denken. Deze abstracte objecten zijn die dingen waar wiskunde over gaat en het zijn deze objecten die de wiskunde waar maken. Een van de grootste problemen waar een wiskundig platonist mee zit, is om te verklaren hoe het kan dat wij kennis hebben van deze abstracte objecten. Dit is het epistemologische probleem waar de platonist een oplossing voor moet zien te formuleren. Een mogelijke oplossing voor dit epistemologische probleem vinden we bij de logicus Kurt Gödel en het is deze oplossing, 'wiskundige intuïtie', die het onderwerp is van deze scriptie.

Deze scriptie zal zich focussen op de houdbaarheid van 'wiskundige intuïtie', zoals gebruikt door Kurt Gödel, namelijk als een epistemologisch vermogen om ons inzicht in wiskunde en haar axioma's te verschaffen. De scriptie zal bestaan uit zes onderdelen. Ten eerste zal ik uiteenzetten wat wiskundige intuïtie bij Gödel is en hoe deze these zich verhoudt tot platonisme in de ontologie van de wiskunde, een stroming die Gödel zelf zeer nauw verbonden achtte met zijn these van wiskundige intuïtie. Ten tweede zullen we twee kritieken op Gödel's opvatting over wiskundige intuïtie aanhoren, beide auteurs doen dat met argumenten die in hun ogen niet enkel de plausibiliteit maar ook de houdbaarheid van de these aantasten. Ten derde zal Gödel's eigen argument voor wiskundige intuïtie uiteen worden gezet, namelijk over de praktijk van het ontdekken van nieuwe axioma's in de wiskunde, geïllustreerd aan de hand van de Continuümhypothese. Ten vierde beschouw ik een mogelijk filosofisch gevolg van Gödel's eerste incompleetheidsstelling, dat te maken heeft met de aard van wiskundige kennis. Ten vijfde beschouw ik een argument voor wiskundige intuïtie op basis van de functie die plaatjes zouden moeten innemen in de wiskundige praktijk. Ten slotte kijken we naar een tweetal kleinere problemen met wiskundige intuïtie die we zullen proberen op te lossen door middel van een vergelijking met Plato's ideeën over hoe we kennis hebben van wiskundige objecten zoals hij het uiteenzet in de Meno. Dit hoofdstuk heeft niet de functie om de houdbaarheid van wiskundige intuïtie aan te tonen, maar moet de lezer door de vergelijking van wiskundige intuïtie met de positie van Plato een beter begrip van wiskundige intuïtie geven.

Een aantal van de punten die gemaakt zullen worden doorheen de scriptie zullen directe argumenten zijn **voor** wiskundige intuïtie, echter het doel van deze scriptie is niet het overtuigen van de lezer van de correctheid of het bestaan van wiskundige intuïtie. Een aantal argumenten zullen geen argumenten zijn voor wiskundige intuïtie, maar voor de these van de **houdbaarheid** van wiskundige intuïtie. Veel argumenten zijn ingesteld om de tegenargumenten die zullen worden gegeven in hoofdstuk twee te bestrijden, om zodoende de filosofische merites en houdbaarheid van wiskundige intuïtie aan te tonen, maar niet om direct argumenten te leveren voor de correctheid van de these van wiskundige intuïtie.

Hoofdstuk 1: Waar hebben we het over?

a) Platonisme

Om goed te begrijpen wat de functie en werking is van Gödel's wiskundige intuïtie, is het onmisbaar om zijn positie in de ontologie van de wiskunde eerst te bezien, het wiskundig platonisme.

Gödel definieert (zijn) platonisme zelf zo:

> [Platonism is] the view that mathematics describes a non-sensual reality, which exists independently both of the acts and [of] the dispositions of the human mind and is only perceived, and probably perceived very incompletely, by the human mind.[1]

Deze definitie komt redelijk overeen met definities van andere filosofen.[2] Wat we dus zien is dat platonisme uit een aantal claims bestaat, ten eerste, wiskundige objecten (de objecten die worden beschreven door de wiskunde) bestaan en zijn *'non-sensual'*. Daarnaast is het bestaan van deze objecten onafhankelijk van onze eigen geest en ten slotte zien we dat Gödel hier vooruit blikt op waar deze scriptie over zal gaan, namelijk de toegang tot deze objecten door middel van de menselijke geest. In het *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (SEP)[3] artikel over wiskundig platonisme zien we de drie belangrijke delen van de platonistische these ook op een dergelijke manier opgenoemd:

> Mathematical platonism can be defined as the conjunction of the following three theses:
>
> > **Existence**.
> > There are mathematical objects.
> >
> > **Abstractness**.
> > Mathematical objects are abstract.
> >
> > **Independence**.
> > Mathematical objects are independent of intelligent agents and their language, thought, and practices.[4]

Wat ontbreekt in deze definitie, maar wat we wel terugzagen in Gödel's definitie is een specificering van de manier waarop er kennis moet worden verkregen van deze objecten. Echter, scherp bezien is dit geen onderdeel van de definitie van wiskundig platonisme, omdat er nog gediscussieerd wordt over wat deze toegang tot wiskundige objecten zou moeten inhouden. Vandaar dat we ons zullen houden aan de definitie van het SEP artikel.

De eerste van de drie claims van de wiskundig platonist behoeft nauwelijks verdere uitleg, wiskunde gaat over wiskundige objecten en deze wiskundige objecten bestaan ook. De tweede claim kan uiteen gezet worden in een tweetal andere eigenschappen, iets is abstract als het niet ruimte-tijdelijk en niet causaal effectief is.[5] Dat wil zeggen, de objecten waar de wiskundig platonist het over heeft, hebben geen causale effecten in de wereld en hebben geen omvang, locatie, moment en tijdsduur. Ten derde, onafhankelijkheid van onze geest. Dit betekent dat deze abstracte objecten bestaan ongeacht of er mensen zijn of niet. Dat betekent dus dat als er niemand iets zou weten over

1 Gödel, 1951, pp. 323
2 Linnebo, Ø. (Winter 2013 Edition), supplement
3 Linnebo, Ø. (Winter 2013 Edition)
4 Linnebo, Ø. (Winter 2013 Edition)
5 Linnebo, Ø. (Winter 2013 Edition)

wiskunde, als er niemand was die inzag dat één en één twee maakt, maken één en één alsnog twee, ondanks ons gebrekkig inzicht daarin. Een voorbeeld van een positie in de filosofie van de wiskunde die overeenkomt met de eerste twee stellingen, maar niet met de derde, is het intuïtionisme van Brouwer. In het intuïtionisme (niet te verwarren met de theorie van wiskundige intuïtie die we zo dadelijk zullen bespreken) worden de wiskundige objecten gecreëerd door de geest van de wiskundige[6]. Deze objecten zijn abstracte, bestaande objecten maar ze zijn niet geestes-onafhankelijk.

Met wiskundig platonisme, een metafysische positie, over wat voor soort van dingen bestaan, doemt echter ook gelijk de epistemologische vraag op: 'Hoe kunnen wij kennis hebben van deze objecten?'. De vraag naar hoe we kennis van wiskundige objecten hebben blijkt echter een moeilijkheid te zijn waar de platonist heden ten dage nog steeds mee worstelt.[7] Het is als antwoord op dit probleem dat Gödel's wiskundige intuïtie zijn intrede doet. Het is een epistemologische verklaring voor de kennis die we hebben dankzij een metafysische realiteit.

b) Gödel's wiskundige intuïtie

Nu dat we weten wat wiskundig platonisme is, kunnen we spreken over het epistemologische probleem waar de platonist een oplossing voor dient te formuleren. De wiskundig platonist probeert met zijn platonisme een verklaring te geven voor de wiskundige kennis die mensen bezitten. Hiervoor introduceren ze een bepaald soort objecten, deze zouden de wiskundige kennis moeten verklaren. Echter, met enkel het aangeven van het bestaan van wiskundige objecten kan er nog geen sprake zijn van een complete verklaring. Aangezien het wiskundige kennis is die een verklaring behoeft, zal deze verklaring ook duidelijk moeten maken hoe het in principe mogelijk is voor een persoon om wiskundige kennis op te doen. Voor de platonist betekent dit specifiek dat hij moet uitleggen hoe het kan dat personen kennis verkrijgen van de wiskundige objecten. Het is precies het antwoord dat Gödel geeft op deze vraag: "Hoe hebben we kennis van wiskundige objecten?", dat we in deze scriptie zullen beschouwen.

Een nadeel van Gödel's these van wiskundige intuïtie is dat Gödel de positie relatief weinig uitwerkt en uitlegt. Een van de meest expliciete verwoordingen hiervan vinden we in het herziene artikel *'What is Cantor's continuum problem'*. In het in 1964 toegevoegde addendum lezen we:

> But, despite their remoteness from sense experience, we do have something like a perception also of the objects of set theory, as is seen from the fact that the axioms force themselves upon us as being true. I don't see any reason why we should have less confidence in this kind of perception, i.e. in mathematical intuition, than in sense perception, which induces us to build up physical theories and to expect that future sense perceptions will agree with them, and, moreover, to believe that a question not decidable now has meaning and may be decided in the future.[8]

Het idee is dat we onze wiskundige intuïtie moeten zien als een extra zintuig. Zoals fysieke objecten door middel van zicht en andere zintuigen zichzelf aan ons kunnen opdringen als bestaand en ons kennis over hen kunnen verschaffen via de zintuigen, zo ook moeten we onze kennis van wiskundige objecten bezien. Direct hierna benadrukt Gödel echter ook weer dat we niet te maken hebben met een zintuig in de klassieke zin van het woord:

> It should be noted that mathematical intuition need not be conceived of as a faculty giving an immediate knowledge of the objects concerned. Rather it seems that, as in the case of physical experience, we form our ideas also of those objects on the basis of something else which is immediately given. Only this something else here is not, or not primarily, the sensations. […] but, as opposed to the sensations, their

6 Brown, 1999/2008, pp. 121-122
7 Linnebo, Ø. (Winter 2013 Edition)
8 Gödel, 1964, pp.268

presence in us may be due to another kind of relationship between ourselves and reality.[9]

Hier ontwaren we een probleem waar één van de commentaren zich ook op zal focussen, Gödel heeft moeite om duidelijk te krijgen wat wiskundige intuïtie nou precies is. Het is een capaciteit van ons denken dat ongeveer functioneert als een zintuig maar er geen is. Het zorgt ervoor dat we verbonden zijn, een '*relationship*' hebben, met de wiskundige realiteit. Het is precies de verdere beschrijving van deze relatie die bij Gödel relatief onuitgewerkt blijft. Desondanks hebben we al wel een aantal eigenschappen erover te horen gekregen, dat hij analoog loopt aan zintuiglijke percepties en dat hij een band legt tussen ons denken en objecten. In de scriptie zullen we zien dat deze beperkte hoeveelheid concrete informatie ons een aantal concrete uitwerkingen kan opleveren, die ons ook weer meer zullen vertellen over de aard van wiskundige intuïtie. In hoofdstuk zes zullen we, aan de hand van deze concrete effecten en een vergelijking met Plato's positie over kennis van wiskundige objecten zoals we die vinden in de Meno, proberen meer helderheid te scheppen over wat Gödel's positie precies is en in welke zin wiskundige intuïtie nou precies lijkt op (visuele) perceptie.

Hiermee weten we ongeveer wat Gödel in gedachten heeft als hij spreekt over wiskundige intuïtie. Op deze these van Gödel zijn vanuit meerdere hoeken verscheidene kritieken gekomen. Vaak zijn deze kritieken, zoals we zullen zien, zeer sterk, waarbij de plausibiliteit van wiskundige intuïtie wordt afgedaan als zeer klein en deze wordt weggezet als een (te) exotische filosofische positie. Zoals aangekondigd heeft deze scriptie als onderwerp de houdbaarheid van wiskundige intuïtie en niet de waarheid ervan. De kritieken die we zullen bespreken zijn kritieken die claimen dat wiskundige intuïtie in Gödeliaanse zin een onhoudbare positie is. Het zijn deze claims die zullen worden onderzocht, te beginnen met een uiteenzetting van deze kritieken.

9 Gödel, 1964, pp. 268

H2: Aanvallen op de houdbaarheid

a) Paul Benacerraf; Kennisleer en wiskundige intuïtie.

De functie van wiskundige intuïtie bij Gödel is, zoals we hebben gezien, om een verklaring te geven voor onze kennis van de wiskundige objecten. De eerste kritiek op Gödel die we zullen bespreken speelt in op onze reguliere ideeën over kennis en hoe wiskundige kennis, zoals verklaard door wiskundige intuïtie, daar niet op aansluit. Paul Benacerraf maakt dit punt in de tekst *'Mathematical Truth'*[10]. Benacerraf beargumenteert dat onze beste theorie(ën) van kennis eisen dat tussen de persoon die ergens kennis over heeft en dat ding waar hij kennis over heeft enig causaal verband bestaat. Zo schrijft hij:

> [.....] the principal defect of the standard [platonic/Godelian] account is that it appears to violate the requirement that our account of mathematical truth be susceptible to integration into our over-all account of knowledge.[11]
>
> I favor a causal account of knowledge on which for X to know that S is true requires some causal relation to obtain between X and the referents of the names, predicates, and quantifiers of S.[12]

In zijn artikel geeft Benacerraf argumenten waarom onze standaard theorie van kennis er een van causale verbinding is. Hoewel hier kritieken op geformuleerd zijn[13] zal dat in deze scriptie niet het onderdeel zijn waar we tegenargumenten op zullen formuleren. Alsnog is het zinnig om te kijken naar één van Benacerraf zijn argumenten voor de noodzaak van een causale verbinding. Hij zegt:

> That some such view must be correct and underlies our conception of knowledge is indicated by what we would say under the following circumstances. It is claimed that X knows that p. We think that X could not know that p. What reasons can we offer in support of our view? If we are satisfied that X has normal inferential powers, that p is indeed true, etc., we are often thrown back on arguing that X could not have come into possession of the relevant evidence or reasons: that X's four-dimensional space-time worm does not make the necessary (causal) contact with the grounds of the truth of the proposition for X to be in possession of evidence adequate to support the inference (if an inference was relevant). The proposition p places restrictions on what the world can be like. Our knowledge of the world, combined with our understanding of the restrictions placed by p, given by the truth conditions of p, will often tell us that a given individual could not have come into possession of evidence sufficient to come to know p, and we will thus deny his claim to the knowledge.[14]

Benacerraf stelt dat kennis van een object veronderstelt dat er een causaal verband bestaat tussen de kenner en het object. Dit onderbouwt hij door aan te geven dat een dergelijke theorie van kennis goed aansluit bij onze intuïties. In dit argument laat hij dit zien door een analyse van welke redenen wij geven voor het feit dat iemand iets niet weet. Aangenomen dat iemand in staat is op een normale manier zaken uit elkaar af te leiden en we weten dat iets waar is, hoe verklaren we dan iemand zijn gebrek aan kennis over een zaak. Dit doen we, stelt Benacerraf, door duidelijk te maken dat een persoon niet in causaal contact staat met het object waar de kennis over zou gaan. Oftewel, het wel of niet hebben van kennis is dan dus afhankelijk van met het object in causaal contact staan. Verder moet natuurlijk nog duidelijk gemaakt worden dat kennis van de wiskundige objecten van de platonist niet causaal zou kunnen zijn, hierop zegt Benacerraf:

10 Benacerraf, 1973
11 Benacerraf, 1973, pp.670
12 Benacerraf, 1973, pp.671
13 Horsten, L. (Spring 2015 Edition)
14 Benacerraf, 1973, pp.671 – 672

> If, for example, numbers are the kinds of entities they are normally taken to be, then the connection between the truth conditions for the statements of number theory and any relevant events connected with the people who are supposed to have mathematical knowledge cannot be made out. It will be impossible to account for how anyone knows any properly number-theoretical propositions[15]

Dus getallen als platoonse objecten en causaliteit gaan niet samen. Laten we eerst kijken naar onze eerder gegeven definitie voor platonisme. Namelijk als een theorie die beaamt dat er niet ruimtelijke, niet tijdelijke en niet causale objecten zijn. Dus het zit in de definitie van de platoonse objecten ingebakken dat ze niet causaal effectief zijn. Dus stellen dat wiskundige objecten wel causaal effectief zijn, zal voor de Gödeliaan die zich tegen de kritiek van Benacerraf wil verdedigen, geen optie zijn. In hoofdstuk vier zal alsnog duidelijk worden gemaakt hoe de Gödeliaan deze doodsteek kan ontwijken. De aanname die door Benacerraf wordt gemaakt waar we tegenargumenten voor zullen formuleren vinden we in het volgende citaat terug:

> [....] the principal defect of the standard [platonic/Gödelian] account is that it appears to violate the requirement that our account of mathematical truth be susceptible to integration into our over-all account of knowledge.[16]

Als de Gödeliaan aannemelijk kan maken dat van wiskundige kennis niet geëist mag worden dat deze hetzelfde is als andere soorten van kennis, dan is het niet langer een kritiekpunt te noemen dat wiskundige kennis niet causaal is. Een manier om dit te doen is door het speciale karakter van wiskundige kennis te bewijzen, wat we zullen doen in hoofdstuk vier.

b) Charles Chihara: Verklarende kracht

Chihara kiest een andere manier om de houdbaarheid van wiskundige intuïtie aan te vallen. Hoewel de meeste van zijn argumenten gericht zijn tegen Gödel's platonisme, vinden we in zijn artikel[17] ook argumenten gericht tegen Gödel's notie van wiskundige intuïtie.

Gödel's analogie tussen visuele perceptie en wiskundige intuïtie zet Chihara ertoe aan om de betrouwbaarheid van deze twee te vergelijken. Chihara identificeert een aantal problemen met de wiskundige intuïtie in deze vergelijking. Ten eerste, empirische data kunnen worden gemeten, we kunnen tests herhalen en verduidelijken wie de data heeft gehad:

> What sort of data about mathematical experience do we have that is comparable to the scientist's Brownian movement data? What is this experience of axioms forcing themselves upon us as being true to which Gödel appeals? And how many people have had these experiences? What sort of people? And under what conditions? Surely, there is something suspicious about an argument for the existence of sets that rests upon data of so unspecified and vague a nature, where even the most elementary sorts of controls and tests have not been run. It is like appealing to experiences vaguely described as "mystical experiences" to justify belief in the existence of God.[18]

Chihara laat in de laatste zin zien dat hij wiskundige intuïtie erg onovertuigend vindt, het gebrek aan 'testbaarheid' van de wiskundige intuïtie doet hem stellen dat wiskundige intuïtie eigenlijk niet kan fungeren als rechtvaardiging of verklaring. Even verderop schrijft hij:

> But here again, the "explanation" offered is so vague and imprecise as to be practically worthless: all we are told about how the "external objects" explain the phenomena is that mathematicians are "in some kind of contact" with these objects. What empirical scientist would be impressed by an explanation this

15 Benacerraf, 1973, pp.673
16 Benacerraf, 1973, pp.670
17 Chihara, 1982
18 Chihara, 1982, pp. 215

> flabby?[19]

Wederom claimt Chihara dat wiskundige intuïtie het grote probleem heeft geen werkelijke, substantiële uitleg te zijn. Wiskundige intuïtie als uitleg levert geen informatie en roept de verdenking op een ad-hoc oplossing te zijn voor problemen waar de wiskundig platonist mee zit. Chihara ziet het gebrek aan concretisering, zowel in testbaarheid als in uitleg over de werking van wiskundige intuïtie, als een goede reden voor een dergelijke verdenking. Wiskundige intuïtie kan niet gelden als goed bewijsmateriaal en het kan niet gelden als verklaring, of zoals Maddy het stelt, als het gaat over voorgaand citaat:

> And finally, he [Chihara] questions whether Gödel's intuition offers any explanation at all.[20]

We zullen Chihara's argument samenvatten met een analogie. Als we willen verklaren dat opium slaapverwekkend is, schieten we niks op met de verklaring 'dat komt door zijn slaapverwekkendheid'. In Chihara's ogen is het gebrek aan concrete effecten op de wereld van wiskundige intuïtie (anders dan het zijn van een verklaring voor de kennis van de wiskundige objecten van de wiskundig platonist) de reden dat wiskundige intuïtie niet als verklaring kan fungeren. Net zoals 'slaapverwekkendheid' bij opium, zou wiskundige intuïtie niet meer zijn dan een naam geven aan een probleem en dan zeggen dat het verklaard is.

De Gödeliaan zal in reactie hierop moeten laten zien dat er redenen zijn om aan te nemen dat er zoiets is als wiskundige intuïtie, door middel van het leveren van concrete effecten van wiskundige intuïtie, waarmee hij kan laten zien dat wiskundige intuïtie meer is dan een ad-hoc oplossing voor het epistemologische probleem waar hij als platonist nu eenmaal een oplossing voor dient aan te leveren. We zullen zien dat de Gödeliaan inderdaad in staat is om dergelijke concrete effecten van wiskundige intuïtie te produceren, met als effect dat Chihara's aanval, die steunt op het gebrek aan extern, concreet bewijs voor wiskundige intuïtie, verzwakt kan worden.

19 Chihara, 1982, pp. 217
20 Maddy, 1989, pp.1135

H3: De Continuümhypothese

Gödel introduceert zijn ideeën over wiskundige intuïtie het meest uitgesproken in zijn in 1964 herziene artikel, *'What is Cantor's continuüm problem?'*. In dit artikel vinden we niet alleen de meest uitgesproken tekst over wiskundige intuïtie[21], we vinden er ook een argument voor wiskundige intuïtie dat inhaakt op de Continuümhypothese. Het argument dat Gödel geeft is dat de Continuümhypothese laat zien dat wiskundige intuïtie als enige in staat is om te verklaren dat er onafhankelijke stellingen zoals de Continuümhypothese kunnen bestaan. Hoewel dit een direct argument is voor wiskundige intuïtie zal er op basis hiervan een ander argument worden geformuleerd dat in gaat tegen Chihara. Immers, als er een verband bestaat tussen een bepaalde wiskundige praktijk (waar Gödel wiskundige intuïtie noodzakelijk voor achtte), dan kan wiskundige intuïtie niet langer gebrek aan concrete effecten worden aangerekend.

Dit alles leidt tot de volgende opbouw van het hoofdstuk. Ten eerste volgt er een uitleg over de Continuümhypothese en de voor het begrip van de Continuümhypothese benodigde kennis over verzamelingenleer. Hierna wijden we uit over de eigenschappen van de Continuümhypothese die ervoor zorgen dat Gödel er zijn argument op kan baseren. Ten slotte zullen we Gödel's argument verder uiteenzetten en van daaruit het argument tegen Chihara formuleren.

a) Wat is de Continuümhypothese?

Gödel introduceert de Continuümhypothese zo:

> The problem is to find out which one of the $\aleph$'s is the number of points of a straight line or (which is the same) of any other continuum (of any number of dimensions) in a Euclidean space. Cantor, after having proved that this number is greater than $\aleph_{r}0$, conjectured that it is $\aleph_{r}1$. An equivalent proposition is this: Any infinite subset of the continuum has the power either of the set of integers or of the whole continuum. This is Cantor's continuum hypothesis.[22]

De Continuümhypothese is de claim dat de eerstvolgende "graad van oneindigheid" na die van de verzameling $\mathbb{N}$ van de natuurlijke getallen (0, 1, 2, 3, ….) die van de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen is (-2, -√2, 3, π, 5.82). Dat wil zeggen, tussen de verzameling $\mathbb{N}$ van de natuurlijke getallen en de verzameling $\mathbb{R}$ van de reële getallen zijn geen oneindige verzamelingen die groter zijn dan $\mathbb{N}$ en kleiner dan $\mathbb{R}$ Echter, wat wil het zeggen dat de ene oneindige verzameling groter is dan de andere oneindige verzameling? De manier waarop dit wordt nagegaan is door middel van het zoeken naar een één-op-één relatie tussen de twee oneindige verzamelingen. Als ik in staat ben zo'n relatie te vinden, dan zijn de twee verzamelingen even groot, terwijl als er kan worden bewezen dat zo'n relatie niet bestaat, dan weten we dat de verzamelingen niet even groot zijn.

Nagaan of een één-op-één relatie werkelijk één-op-één is gaat op de volgende manier. We hebben een één-op-één correspondentie tussen (de elementen van) een verzameling V en (de elementen van) een verzameling W als er een functie een functie F van V naar W is, zodanig dat F aan verschillende elementen van V verschillende elementen van W toevoegt en zodanig dat er bij elk element w van W precies een element v in V is met F(v) = w. Een één-op-één correspondentie F tussen V en W associeert dus met elk element v in V precies een element F(v) in W zodanig dat er bij elk element w in W ook precies een element v in V is met F(v) = w. Of meer intuïtief gezegd, we geven een functie die elk element uit de ene verzameling koppelt aan precies één element uit de andere verzameling en vice versa. We zullen twee voorbeelden geven van het redeneren met deze begrippen, één met eindige verzamelingen en een andere met oneindige verzamelingen.

21 Gödel, 1964, pp.268
22 Gödel, 1964, pp. 256

Neem de verzameling X = {1, 2, 3} en de verzameling Y = {1, 2, 3, 4, 5}. Als we nu een functie willen maken van X naar Y die alle elementen van Y beslaat, dan gaat dit niet lukken, X heeft niet genoeg elementen om alle elementen van Y te beslaan, immers X heeft drie elementen, die kunnen nooit vijf elementen bereiken. Als we nu een functie van Y naar X willen maken die alle elementen van X beslaat zonder dubbelen lukt dit ook niet, immers als we elk element van Y moeten koppelen aan X dan kunnen we dit niet doen zonder elementen dubbel te nemen, immers er zijn vijf elementen in Y die verdeeld moeten worden over drie of minder elementen van X. We zien dat er geen één-op-één relatie kan worden gemaakt tussen X en Y, wat overeen komt met de intuïtie dat een verzameling met drie elementen niet even groot is als een verzameling met vijf elementen.

Dit was een voorbeeld met eindige verzamelingen, hier kunnen we eenvoudigweg de elementen tellen en dan tot de conclusie komen dat de ene verzameling er meer heeft dan de ander en dus groter is. Bij oneindige verzamelingen werkt dit iets anders, hier kan een verzameling een strikte deelverzameling zijn (een verzameling die bestaat uit een deel van de elementen van een andere verzameling maar niet uit al de elementen van die andere verzameling) maar nog steeds even groot zijn. Neem bijvoorbeeld de verzameling $\mathbb{N}$ van de natuurlijke getallen en de verzameling $\mathbb{N}_{oneven}$ van de oneven natuurlijke getallen. In tegenstelling tot wat wellicht valt te verwachten, kunnen we wel degelijk een één-op-één relatie geven tussen de positieve oneven getallen en $\mathbb{N}$, ondanks dat $\mathbb{N}_{oneven}$ een strikte deelverzameling is van $\mathbb{N}$ (immers $\mathbb{N}_{oneven}$ is $\mathbb{N}$ zonder de positieve even getallen). Inzien dat de twee verzamelingen even groot zijn doen we door middel van onderstaand plaatje en hieruit leiden we de functie af die de één-op-één correspondentie zal geven[23]:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	….	$\mathbb{N}_{oneven}$
|	|	|	|	|	|	|	|	|	|	|		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	….	$\mathbb{N}$

Van de positieve oneven getallen naar $\mathbb{N}$ en terug

Zoals we zien, kan je vanuit de oneven getallen bij alle natuurlijke getallen terechtkomen en vice versa. De betreffende één-op-één correspondentie F van $\mathbb{N}_{oneven}$ naar $\mathbb{N}$ wordt gegeven door $F(x) = (x - 1)/2$. Immers, voor elk natuurlijk oneven getal krijgen we precies één natuurlijk getal terug, wel specifiek het natuurlijke getal zoals hierboven gekoppeld aan het oneven natuurlijke getal. Omgekeerd is de functie G van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{N}_{oneven}$, gedefinieerd door $G(y) = 2y + 1$, een één-op-één correspondentie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}_{oneven}$. Als we een natuurlijk getal invoeren krijgen we daarvan een natuurlijk oneven getal, precies zo gekoppeld zoals hierboven. De verzameling van de oneven natuurlijke getallen en de verzameling van alle natuurlijke getallen zijn dus even groot.

Wat we niet zullen bewijzen (zie hiervoor bijvoorbeeld de Swart[24]) is dat de verzameling $\mathbb{R}$ groter is dan de verzameling $\mathbb{N}$. Dat $\mathbb{R}$ groter is dan $\mathbb{N}$ is door Cantor in 1873 ontdekt[25] en dat deed hem redelijk snel hierna de Continuümhypothese formuleren. Immers, nu dat bekend is dat $\mathbb{R}$ groter is dan $\mathbb{N}$, kunnen we ons afvragen of er oneindige verzamelingen zijn die groter zijn dan $\mathbb{N}$, maar kleiner dan $\mathbb{R}$. Gödel verwoordt de vraag anders, namelijk; "Hoeveel punten liggen er op een lijn?". Het aantal punten op een lijn is gelijk aan het aantal elementen van $\mathbb{R}$ en we weten dat dit aantal groter is dan het aantal elementen van $\mathbb{N}$. We weten ook dat de laagste graad van oneindigheid die van $\mathbb{N}$ is, dus als we de graden van oneindigheid zouden tellen, vertaalt de vraag zich naar: noem de graad van oneindigheid van $\mathbb{N}$ 0, is die van $\mathbb{R}$ dan 1?

23 De Swart, 1989, pp. 28
24 De Swart, 1993, pp. 258-276
25 Ferreirós, J. (Winter 2012 Edition)

b) De onbewijsbaarheid van de Continuümhypothese

Toen Gödel zijn eerste versie van het artikel "What is Cantor's continuum problem?" schreef, was er al geruime tijd gewerkt aan het oplossen van dit probleem, maar er was bar weinig bereikt. In zijn artikel beschrijft Gödel hoe er nog niks bereikt is ten aanzien van de Continuümhypothese en dat er wellicht ook geen oplossing binnen het huidige axiomasysteem van de verzamelingenleer gevonden kan worden. Later bewezen hijzelf en Cohen[26] dat de Continuümhypothese inderdaad onafhankelijk is van de huidige axioma's. Voor de verzamelingenleer (waar de wiskunde op terug valt te brengen) was er een axiomasysteem, ZF(C), opgericht, waar men het redelijk eens over had kunnen worden. De Continuümhypothese blijkt echter onafhankelijk te zijn van deze axioma's. Dat wil zeggen, noch de waarheid noch de onwaarheid van de Continuümhypothese kan bewezen worden op basis van dit axiomasysteem. Dit terwijl, zoals Gödel in zijn artikel uitlegt, er geen enkele reden is om aan te nemen dat we te maken hebben met een slecht geformuleerde vraag:

> So the analysis of the phrase "how many" unambiguously leads to a definite meaning for the question stated in the second line of this paper.[27]

In zijn paper (toen er nog geen zekerheid bestond over de onafhankelijkheid van de Continuümhypothese) stelde Gödel voor om op zoek te gaan naar nieuwe axioma's die ons in staat kunnen stellen om de Continuümhypothese te beslissen. Aangezien een correct gestelde wiskundige vraag, zoals de vraag naar het aantal punten op een lijn, nu eenmaal om een antwoord vraagt, hebben we bij het opstellen van de axioma's van de verzamelingenleer ergens een axioma overgeslagen waarmee we deze vraag beantwoorden kunnen. Het is als doorsteek op deze opmerkingen dat we Gödel's argument voor wiskundige intuïtie kunnen zien.

c) Wiskundige intuïtie en zoeken naar axioma's

In de herziene versie van zijn artikel eindigt Gödel met een bijvoegsel, waarin we een uiteenzetting zien van wiskundige intuïtie, waarbij hij aansluiting zoekt bij de rest van zijn artikel. Wiskundige intuïtie, zo lijkt het, is de enige manier om te verklaren hoe het kan dat de Continuümhypothese onafhankelijk is van onze axioma's maar dat we er uiteindelijk toch een antwoord van mogen verwachten. Zo karakteriseert Gödel de zoektocht naar nieuwe axioma's:

> Hence its undecidability from the axioms being assumed today can only mean that these axioms do not contain a complete description of that [the mathematical] reality.[28]

> However, the question of the objective existence of the objects of mathematical intuition (which, incidentally, is an exact replica of the question of the objective existence of the outer world) is not decisive for the problem under discussion here. The mere psychological fact of the existence of an intuition which is sufficiently clear to produce the axioms of set theory and an open series of extensions of them suffices to give meaning to the question of the truth or falsity of propositions like Cantor's continuum hypothesis.[29]

Dus de manier om te verklaren dat we in staat zijn tot het vergaren van nieuwe axioma's is wiskundige intuïtie. Hoe anders, stelt Gödel, kunnen we de soort van incomplete kennis hebben die we momenteel hebben? Vergelijk dit bijvoorbeeld met de positie van de logicist en met de aan zijn positie gelieerde wiskundige praktijk. Logicisme is de theorie dat de wiskunde terug valt te brengen

26 Brown, 1999/2008, pp.182
27 Gödel, 1964, pp. 256
28 Gödel, 1964, pp. 260
29 Gödel, 1964, pp. 268

tot enkel logische wetten[30] (we zullen in het volgende hoofdstuk zien dat deze positie zeer problematisch is, maar voor nu kijken we even naar de effecten op de wiskundige praktijk). Het is onduidelijk hoe een logicist om zou moeten gaan met het gegeven dat de Continuümhypothese onbewijsbaar is. Immers, als bewezen is dat de Continuümhypothese onafhankelijk is van de axioma's dan zal de logicist eenvoudigweg moeten accepteren dat de Continuümhypothese nooit beslist zal kunnen worden. Iets breder getrokken, voor een logicist zal de bezigheid van het vinden van axioma's sowieso een onzinnige bezigheid zijn. Immers, de enige axioma's die een logicist in zijn theorie wil zijn die van de logica, dus daarmee is al een compleet beeld van de axioma's gegeven. De wiskundige praktijk van het blijven zoeken naar axioma's om een completer beeld te krijgen van de wiskunde is bij hen geen optie.

Er zijn twee manieren waarop het argument van Gödel spreekt voor zijn wiskundige intuïtie. Ten eerste is het een direct argument, dat wil zeggen, als we ons willen aansluiten bij het idee van het blijven zoeken van nieuwe axioma's, we ofwel wiskundige intuïtie moeten aannemen, ofwel een nieuw(e) theorie/tegenargument naar voren moeten schuiven. Het is echter ook op een andere manier een argument. Niet alleen maakt dit wiskundige intuïtie plausibel, het maakt het ook houdbaar. Chihara's argument focuste zich op het gebrek aan concrete eigenschappen en effecten die toegeschreven kunnen worden aan wiskundige intuïtie. We hebben in dit hoofdstuk echter gezien dat wiskundige intuïtie zich wel degelijk kan concretiseren. Naast dat het een oplossing is voor een ontologisch vraagstuk, kan wiskundige intuïtie een argumentatieve rol spelen bij de keuze tussen bepaalde wiskundige praktijken. De vraag naar of we wel of niet moeten zoeken naar nieuwe axioma's voor de verzamelingenleer is afhankelijk van ons antwoord op de vraag hoe we wiskundige kennis vergaren en bij extensie afhankelijk van hoe we ons verhouden tot Gödel's wiskundige intuïtie.

30 Horsten, L. (Spring 2015 Edition)

H4: De eerste onvolledigheidsstelling en wiskundige kennis

De door Gödel ontdekte eerste onvolledigheidsstelling geeft iemand die wiskundige intuïtie wil verdedigen ook houvast. Uit de eerste onvolledigheidsstelling kan worden afgeleid dat wiskunde een zeer bijzondere/afwijkende vorm van kennis is. Dit helpt de Gödeliaan omdat het argument van Benacerraf op de veronderstelling leunt dat van wiskundige kennis mag worden verwacht dat het op eenzelfde manier kan worden verklaard als andere kennis. Als wiskundige kennis echter aantoonbaar afwijkend is, is deze veronderstelling niet langer gerechtvaardigd.

Dit hoofdstuk heeft de volgende opbouw. Ten eerste zullen we een korte uitleg geven over wat de eerste onvolledigheidsstelling inhoudt. Dit wordt opgevolgd met een aantal onderverdelingen van onze kennis, zoals gezien bij Hume en Kant, zodat we een kader hebben waarbinnen we de wiskundige kennis een plaats kunnen geven. Hierna zullen we laten zien dat de eerste onvolledigheidsstelling impliceert dat wiskundige kennis synthetische a-priori kennis is, een vorm van kennis die werd geïntroduceerd door Kant. Ten slotte wordt duidelijk gemaakt dat het feit dat wiskunde in deze categorie van kennis valt het argument van Benacerraf problematiseert. Doordat wiskundige kennis een zeer bijzondere vorm van kennis blijkt te zijn, is de eis van Benacerraf dat wiskundige kennis causaal zou moeten zijn niet langer meer gerechtvaardigd en is de Gödeliaan in staat om dit tegenargument te omzeilen.

a) Gödel's onvolledigheidsstelling

Op basis van H.C.M. de Swart's uitleg[31] over de onvolledigheidsstellingen zullen we beknopt een overzicht geven van de conclusies van dit theorema. We zullen ons niet bezighouden met het bewijs dat Gödel hiervoor formuleert, maar enkel naar de conclusies en mogelijke gevolgen kijken.

De eerste onvolledigheidsstelling: Voor elk formeel systeem van de getaltheorie dat aan bepaalde minimale eigenschappen voldoet geldt dat er ware uitspraken zijn die niet te bewijzen vallen binnen dat formele systeem.[32] Wat dit wil zeggen is dat als we een formeel systeem maken waarin we de getaltheorie modelleren, en als dit systeem sterk genoeg is, dat we voor dit systeem altijd een waarheid kunnen vinden die niet valt te bewijzen in dat systeem. Een sterk genoeg systeem wil zeggen dat het een aantal dingen in ieder geval kan doen. Voor elk systeem dat ook maar de kans wil hebben volledig te zijn aangaande de waarheden van de getaltheorie, geldt dat het aan bepaalde eigenschappen moet voldoen.[33] Dit wil dus zeggen dat formele systemen van de getaltheorie altijd onvolledig zullen zijn, het zal nooit mogelijk zijn alle waarheden van de getaltheorie binnen één formeel systeem te bewijzen.

b) Hume en Kant; wiskunde als bijzondere soort van kennis

In "*An enquiry concerning human understanding*"[34] beschrijft Hume dat er twee vormen van kennis kunnen zijn, *'matters of fact'* en '*relations of ideas'*[35]. *Matters of fact* zijn afkomstig van de zintuigen of het geheugen (ofwel, vanuit 'i*mpressions'* of door i*mpressions* gevormde *ideas)* en is de kennis die we afleiden uit de indrukken die wij hebben. Deze leveren ons kennis op over de dingen. Ik zie een witte muur voor me, dus ik weet, er is een muur en deze is wit. Dit is de eerste oorsprong van kennis en deze kennis voegt informatie toe, naarmate ik meer *impressions* heb, ontrafel ik meer *matters of fact* . In contrast hiermee staan de *relations of ideas*. De *relations of ideas* zijn kennis die ik op doe door waarheden te vinden die 'per definitie' waar zijn. Dus als ik een *idea* van een

31 De Swart, 1993, pp. 465-475
32 De Swart, 1993, pp. 465
33 Smith, 2007/2013, pp. 49-52
34 Hume, 2008
35 Hume, 2008, pp. 18

eenhoorn heb, dan kan ik daar de ware uitspraak over doen, op basis van *relations of ideas*, dat deze eenhoorn "wit of niet wit" is.

Als we nu een paar decennia vooruit springen zien we dat Kant in de "Kritiek van de Zuivere Rede"[36] een vergelijkbare onderverdeling maakt van de kennis. Ten eerste is er synthetische a-posteriori kennis, kennis die wordt opgedaan door middel van de zintuigen (a-posteriori) en kennis toevoegend is (synthetisch). Deze kennis is vergelijkbaar met de *impressions* bij Hume. Ten tweede is er a-priori analytische kennis, dit is kennis die geen informatie toevoegt over de wereld (analytisch) en kenbaar is zonder gebruik van de zintuigen (a-priori).[37] Deze soort kennis is vergelijkbaar met de *relations of ideas*. Echter in tegenstelling tot Hume stelt Kant dat er nog een andere vorm van kennis is, namelijk de synthetische a-priori kennis, die dus wel kennis toevoegt maar die niet het gebruik van de zintuigen nodig heeft om te worden verworven. Deze soort van kennis is alles behalve gewoon, want de door Hume gegeven onderverdeling lijkt compleet. Hoe kan het dat er kennis is die mij iets vertelt over de wereld zonder dat ik input krijg over de wereld zelf. Uitgerekend wiskunde is het voorbeeld dat Kant geeft van een dergelijke, bijzondere soort van kennis. Na te hebben duidelijk gemaakt dat de zintuigen niet nodig zijn voor het vergaren van wiskundige kennis (dus wiskunde is a-priori) zegt hij:

> Alle wiskundige oordelen zijn synthetisch. Deze stelling lijkt de aandacht van de analytici van de menselijke rede tot dusver te zijn ontgaan, en zelfs geheel tegengesteld aan al hun vermoedens te zijn, hoewel ze onbetwistbaar is en de gevolgen ervan zeer belangrijk zijn. Want omdat men van mening was dat alle gevolgtrekkingen van de wiskundigen verlopen volgens de wet van de tegenspraak (dat vereist de aard van alle apodictische zekerheid), kwam men tot de overtuiging dat ook de grondbeginselen van de wiskunde volgens de wet van de tegenspraak wordt gekend.[38]

We zullen niet ingaan op de argumenten van Kant voor het synthetisch zijn van de wiskunde, we zullen zien dat we een argument kunnen formuleren hiervoor op basis van de zojuist geformuleerde onvolledigheidsstelling. Belangrijk is om hier te beseffen wat het betekent om synthetisch te zijn. Zoals Kant zegt, is de wiskunde niet analytisch, omdat ze niet gebaseerd is op de wet van de non-contradictie. Anders geformuleerd, wiskundige waarheden zijn geen logische waarheden, het zijn geen waarheden die 'per definitie' waar zijn. Ook belangrijk is om stil te staan bij wat voor een bijzondere vorm van kennis dit wel niet is, kennis die informatie oplevert zonder dat er enige input, enige *impression* vanuit de wereld, nodig is om deze kennis te genereren.

c) Synthetische wiskunde en de onvolledigheidsstelling

We hebben gezien dat formele systemen niet in staat zijn om het geheel van de getaltheorie te bewijzen. Bij elk formeel systeem is er een waarheid van de getaltheorie die in dat formele systeem onbewijsbaar is. Dit vertelt ons ook gelijk dat wiskunde niet analytisch kan zijn in de zin zoals hierboven beschreven. Immers, logische waarheden, waarheden die 'per definitie' waar zijn, kunnen triviaal wel in een formeel systeem worden beschreven, namelijk in een logisch systeem. Dit is wellicht niet direct duidelijk met de manier waarop Kant analytisch definieert, al is het maar omdat het niet een formele manier van opschrijven is. We vinden als alternatieve definitie van analytisch:

> In more modern terminology, following roughly a 'Fregean' account of analyticity, one would define a proposition A to be analytic iff either
> (i) A is an instance of a logically valid formula; e.g. 'No unmarried man is married' has the logial form $-\exists x(-P(x) \& P(x))$, which is a valid formula, or
> (ii) A is reducible to an instance of a logically valid formula by substitution of synonyms for synonyms;

36 Kant, 2004
37 Kant, 2004, pp. 93-104
38 Kant, 2004, pp. 104-105

e.g., 'No bachelor is married'.[39]

De Kantiaanse definitie is niet identiek maar heeft prima facie wel dezelfde extensie als de Fregeaanse definitie, analytische waarheden zijn waarheden waarbij we enkel hoeven te kijken naar de logische vorm van de claim. We hoeven, in Kant's termen, geen predicaat toe te voegen aan ons onderwerp/subject om af te kunnen leiden dat inderdaad dit predicaat er een onderdeel van is. Het voordeel van de 'moderne' formulering, is dat we direct kunnen inzien dat de eerste onvolledigheidsstelling het onmogelijk maakt dat getaltheorie analytisch is. Want als een waarheid, of een verzameling waarheden, analytisch zijn, dan moeten ze te reduceren zijn tot logische waarheden. Als al deze waarheden logische waarheden zijn, dan kan er een formeel systeem worden geleverd voor al deze waarheden. Sterker nog, voor de predicaten en propositielogica geldt de volledigheidsstelling[40], die stelt dat alle geldige uitspraken ook bewijsbaar zijn in dat formele systeem. Als voor de logica de volledigheidsstelling geldt en de wiskunde zou te reduceren zijn tot logica, dan geldt er voor een formeel systeem van de getaltheorie dat deze niet onvolledig is. Echter we hebben al met behulp van de eerste onvolledigheidsstelling geconcludeerd dat zo'n formeel systeem niet bestaat, dus de wiskunde is niet te reduceren tot logica. Dit betekent dat inderdaad de wiskunde niet analytisch maar synthetisch is.

Dit brengt ons tot het inzicht dat wiskundige kennis synthetische a-priori kennis is. Er is op sommige momenten ook verdedigd dat wiskundige kennis a-posteriori zou zijn, hier zullen we niet op ingaan, echter het is interessant te weten dat Gödel de positie als absurd beschouwt en hem verwerpt[41], en dat er op zijn minst op het eerste gezicht argumenten zijn die de positie problematisch maken, zoals het gebrek aan noodzaak om een zintuig aan te wenden om in te zien dat één plus één gelijk is aan twee en dat perfecte vormen in de meetkunde zoals de cirkel, zich aan onze zintuigen nooit voordoen. Dat wiskunde synthetische a-priori kennis is, geeft aan wat een bijzondere vorm van kennis wiskundige kennis is. Op het eerste gezicht zijn we wellicht geneigd om een filosoof gelijk te geven als hij kennis onderverdeelt in dingen die per definitie waar zijn en dingen waarvoor we kennis van de wereld hebben moeten verkrijgen. We zien echter dat er goede redenen zijn om aan te nemen dat wiskunde buiten dit intuïtieve plaatje van kennis valt. Het is precies deze eigenschap van wiskundige kennis die het argument van Benacerraf problematiseert.

d) Benacceraf's argument geproblematiseerd

Zoals we hebben gezien kan op basis van de eerste onvolledigheidsstelling en de onderverdeling van soorten kennis zoals gevonden bij Kant en Hume, worden geconcludeerd dat wiskunde een zeer bijzondere vorm van kennis is. Als we nu terugkijken naar het argument dat wordt gegeven door Benacerraf, dan zijn er een aantal vooronderstellingen die we kunnen aanvechten:

i) Wiskundige kennis moet passen binnen ons verdere plaatje dat we hebben van kennis.
ii) Ons idee over kennis leunt op de causale interactie die wij met de objecten van onze kennis hebben, als er geen sprake kan zijn van causale interactie dan past kennis over de objecten niet binnen ons bredere idee over kennis.
iii) Als we wiskundige intuïtie gebruiken ter verklaring van wiskundige kennis, dan is deze kennis niet gebaseerd op causaal effectieve objecten.

We hebben gezien dat iii) correct is, in de zin dat wiskundige objecten bij de verklaring van wiskundige kennis die Gödel geeft niet causaal effectief zijn. Er zijn kritieken uit meerdere hoeken geweest op punt ii). Maar op basis van wat we net hebben ontdekt over wiskundige kennis, komt i)

39 De Swart, 1993, pp. 359
40 De Swart, 2013, pp. 4
41 Gödel, 1951, pp. 312

ineens in een nieuw, kwaad, daglicht te staan.

Zoals we zojuist hebben gezien is wiskunde een heel bijzondere vorm van kennis, een vorm van kennis waar we niet zo snel een andere vorm van kunnen vinden. We kunnen er voornamelijk over vertellen wat het niet is, het is niet als logica en het is niet als empirische kennis die we via de zintuigen verkrijgen. Als wiskunde zo'n bijzondere vorm van kennis is, dan is er werkelijk geen enkele reden om aan te nemen dat kennis van wiskunde in ons 'standaardplaatje' van kennis zou passen. Dit betekent dat één van de belangrijke veronderstellingen die Benacerraf maakt op losse schroeven staat. We zien dat dit argument tegen wiskundige intuïtie alsnog niet in staat is om de vernietigende kritiek te zijn, waarmee de onhoudbaarheid van wiskundige intuïtie wordt aangetoond, die Benacerraf dacht dat het was.

H5: Wiskundige plaatjes; illustraties of bewijzen?

In het artikel *“Proofs and Pictures”*[42], door James Robert Brown, treffen we een verdediging aan van het gebruik van wiskundige plaatjes en illustraties als bewijzen voor wiskundige stellingen, naast de traditionele formele bewijzen die moderne wiskundigen gewend zijn te gebruiken. Hier koppelt hij een epistemologie van de wiskunde aan die sterk overeen komt met/gelijk loopt aan Gödel's wiskundige intuïtie. Dit helpt de Gödeliaan op twee manieren, ten eerste kan het een direct argument zijn als we het eens zijn met Brown aangaande de functie van plaatjes. Echter is het ook wederom een argument voor de houdbaarheid van wiskundige intuïtie doordat het tegen Chihara's argument ingaat, door te laten zien dat wederom er een concreet effect valt te geven van wiskundige intuïtie.

Het hoofdstuk is als volgt opgebouwd. Ten eerste geven we twee voorbeelden van Brown van plaatjes die als bewijs zouden kunnen functioneren. Daarna zullen we de argumenten van Brown weergeven voor het idee dat de plaatjes als wiskundige bewijs zouden moeten mogen dienen. Daarna nemen we een aantal problemen met Brown's claims in overweging. Ten slotte zullen we de verbinding weergeven die Brown ziet tussen wiskundige intuïtie en plaatjes als bewijzen en op basis hiervan argumenten formuleren voor wiskundige intuïtie en de houdbaarheid ervan.

a) Overtuigende plaatjes

We zullen beginnen met twee voorbeelden die Brown geeft van plaatjes die als bewijs kunnen fungeren. Bij het eerste voorbeeld is ook het formele bewijs erbij genomen.

> Theorem: $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$
> [Picture] Proof:

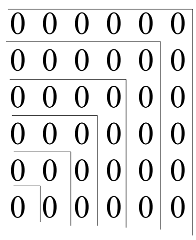

Figure 3

> This picture proof should be contrasted with a traditional proof by mathematical induction which would run as follows:
>
> Proof (traditional): We must show that the formula of the theorem holds for 1 (the basis step), and also that, if it holds for n then it also holds for n+ 1 (the inductive step).
> Basis: $((2 * 1) - 1) = 1^2$
> Inductive: Suppose $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$ holds as far as n. Now we add the next term in the series, $2(n + 1) - 1$, to each side:
>
> $$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + 2(n + 1) - 1 = n^2 + 2(n + 1) - 1$$
>
> Simplifying the right hand side, we get:

42 Brown, 1997

$$\begin{aligned} n^2 + 2(n + 1) - 1 &= n^2 + 2n + 2 - 1 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

This last term has exactly the form we want. And so the theorem is proven.[43]

Het eerste bewijs is een niet formeel bewijs, toch zal menig lezer duidelijk zijn dat het theorema waar is op basis van het plaatje. Door het blijven plaatsten van de extra hoeveelheid, kan elke keer weer een vierkant gevormd worden waarvan de oppervlakte gelijk is aan de gegeven som. Het tweede bewijs zal niet eens direct duidelijk zijn voor niet wiskundigen. Er volgt hier dus een korte uitleg van dit bewijs ter compleetheid, maar de lezer die het al begrijpt kan dit overslaan.

Bewijs uitgelegd:

Wiskundige inductie is de wiskundige bewijsmethode waarbij we een tweetal stappen moeten zetten, waarna we mogen veronderstellen dat de uitkomst bewezen is. De eerst stap is dat we bekijken of ons bewijs geldt voor het eerste getal, ofwel, in het geval van de positieve gehele getallen (alle gehele getallen groter dan 0), voor het getal 1.
Als we voor n, 1 invullen (n=1) in deze formule $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, dan krijgen we:

$(2 * 1) - 1 = 1^2$, wat uitkomt op 1 = 1, wat klopt.

Wat we nu willen bewijzen is dat, als deze formule die we bekijken waar is voor een bepaald getal n, dan is deze formule ook waar voor het getal n +1.
De gedachte hierachter is dat als we voor het kleinste natuurlijke getal weten dat de bewering juist is en we weten voor willekeurige n, als de bewering juist is voor n, dat de bewering dan ook juist is voor n + 1, dan weten we dat de bewering juist is voor alle natuurlijke getallen. Immers, hij gaat op voor 1 en als de formule correct is, dan geldt de formule ook voor het volgende getal. Dus hij geldt voor 1, maar daarmee ook voor 2. Maar als het voor twee geldt, dan geldt het ook voor n +1, ofwel 2 + 1, ofwel 3. Op deze manier kunnen we alle getallen aflopen en hebben we dus bewezen dat de formule geldt voor alle getallen.
Dus nu moeten we bewijzen dat als de formule opgaat voor n, dat hij dan ook opgaat voor n + 1. Aangezien we te maken hebben met een optelsom, moet de n + 1, de volgende in de reeks, opgeteld worden bij wat we al hadden. Dus we hebben de oude som, $1 + 3 + 5... + 2n - 1$, en daar komt n + 1 bij, ofwel, $2(n + 1) - 1$ wordt opgeteld bij wat we al hadden, en dat geeft ons:

$1 + 3 + 5... + 2n - 1 + 2(n + 1) - 1$.

Als onze som correct wil zijn moet nu gelden dat deze waarde gelijk is, niet aan n^2, maar aan $(n+1)^2$.
Omdat $n^2 = 1 +3+5...+2n-1$ (dat hadden we immers verondersteld), geldt dat:

$n^2 + 2(n + 1) - 1 = 1 + 3 + 5...+ 2n - 1 + 2(n + 1) - 1$

We kunnen de linkerkant herschrijven tot:

$n^2 + 2n + 2 - 1$, ofwel
$n^2 + 2n + 1$.

Dit is dan weer gelijk aan $(n + 1)^2$, immers $(n + 1)(n + 1) = n*n + 1*n + 1*n + 1*1 = n^2 + 2n + 1$.

43 Brown, 1997, pp.169-70

Nu hebben we dus dat als geldt $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, dat dan ook geldt $1 + 3 + 5... + 2n - 1 + 2(n + 1) - 1 = (n + 1)^2$, en aangezien $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ geldt voor $n = 1$, geldt het ook voor elke opvolger, oftewel, het theorema gaat op.

Een tweede voorbeeld dat Brown geeft is dat een continue functie (losjes gezegd, een functie die je zou kunnen tekenen zonder je potlood van het papier te hoeven halen) die op enig punt onder en op een ander punt boven de nullijn ligt, op enig punt de nullijn raakt. Het formele bewijs hiervoor is uitgebreid en zullen we niet geven (zie Brown voor geïnteresseerden[44]), maar zie het volgende plaatje dat als picture proof kan dienen:

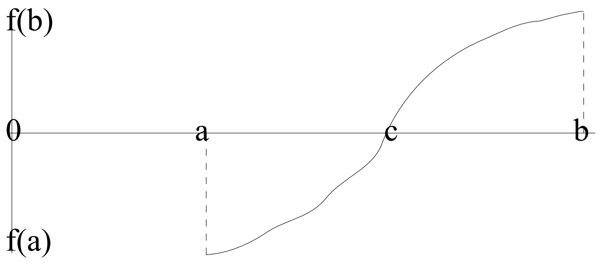

Fig 1. The intermediate zero theorem[45]

Als we dit zien kunnen we haast niet twijfelen aan het feit dat de lijn, en elke lijn met een punt boven en onder de nullijn, de nullijn raakt.

b) Plaatjes als bewijzen

Na deze voorbeelden vraagt Brown zich af wat de uitvinding van het formele bewijs precies heeft opgeleverd. Hij geeft hiervoor drie opties.

1) Het bewijs zou een theorema hebben bewezen waarvan we voor het bewijs niet wisten of het waar was. Brown geeft aan dat we deze optie moeten verwerpen, iedereen die het bovenstaande plaatje ziet, weet dat de beschreven som gelijk is aan n^2 en dat de functie de nullijn raakt.

> Using the picture alone, we can be certain of this result—if we can be certain of anything.[46]

2) Het bewijs legde uit wat het theorema precies betekende en waarom het waar was. Echter, kijkend naar het plaatje kunnen we ook precies zien waarom de som gelijk is aan n^2. Het formele bewijs legt uit waarom het theorema waar is, maar het visuele bewijs geeft ons ook uitleg.

3) Het theorema waarop uit was gekomen, geldt als argument voor de premissen waar het bewijs gebruik van maakte. Het theorema was al gekend, het enige wat dit bewijs bewees is dat de premissen van het bewijs correct waren, aangezien ze op een gekende waarheid uitkomen.

Stel je voor dat er een bewijs was waaruit bleek dat als een continue lijn een punt heeft boven de nul en een punt onder de nul, dat de lijn dan niet op enig punt de nullijn raakt. Dit zou waarschijnlijk niet ons geloof beschadigen aangaande het feit dat continue lijnen die op enig punt boven de nullijn en op een ander punt onder de nullijn liggen, de nullijn raken. Waarschijnlijk

44 Brown, 1997, pp.162-163
45 Brown, 1997, pp.163
46 Brown, 1997, pp.164

zouden we geneigd zijn om te kijken naar wat er mis is met ons bewijs. Brown kiest dus voor de derde optie:

> It is pretty clear that, of our three options, the final one is the best. (The second option, explanation, is compatible with the third, confirmation, but seems much less plausible.) The consequence of adopting (III) is highly significant for our view of pictures. We can draw the moral quickly: on this view pictures are crucial. They provide the known to be true consequences that we use for testing the hypothesis of arithmetization. Trying to get along without them would be like trying to do theoretical physics without the benefit of experiments to test conjectures.[47]

Brown verwerpt een mogelijke tegenwerping hierop, er is namelijk nog een andere optie dan drie; we hebben met twee verschillende bewijsmethodes hetzelfde theorema bewezen. Brown antwoord hierop dat dit enkel een herformulering is van zijn positie, immers:

> I could rephrase in as saying: the two proof-techniques arrive at the same result. One of these (the picture) is prima facie reliable. The other (the analytic proof) is questionable, but our confidence in it is greatly enhanced by the fact that it agrees with the reliable method.[48]

c) Aanmerkingen bij Brown's argumenten

Er zijn echter wel degelijk problemen met wiskundige plaatjes als bewijzen, problemen waar Brown te makkelijk over heen gaat. Ten eerste is er het gevaar dat plaatjes kunnen leiden tot verkeerde inzichten, dingen kunnen door een plaatje waar lijken te zijn maar eigenlijk onwaar zijn. Brown's reactie hierop is dat zulke problemen zich ook voor kunnen doen bij conventionele vormen van wiskundig bewijzen. Het is echter niet direct duidelijk dat zoiets zich inderdaad kan voordoen, als we bijvoorbeeld kijken naar het bovenstaande formele bewijs dat $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, dan is het niet duidelijk dat iemand die lang genoeg naar het bewijs heeft gekeken tot een andere conclusie kan komen dat deze som inderdaad gelijk is aan n^2 en het lijkt ook niet mogelijk om uit dit bewijs andere waarheden te halen dan dat deze som inderdaad gelijk is aan n^2. Terwijl, als we kijken naar de picture-proof, dan is het wel degelijk mogelijk dat we hier andere dingen bewezen kunnen zien worden. Daarnaast is er ook het probleem van de beperkte toepassing. Brown geeft een aantal voorbeelden van picture-proofs, maar maakt geenszins aannemelijk dat elk wiskundig theorema dat met formele middelen bewezen kan worden, ook bewezen kan worden door middel van een visuele representatie zoals hierboven wordt gedaan. Dit terwijl het stukken waarschijnlijker is dat theorema's die bewezen kunnen worden met een picture-proof ook een formele tegenhanger hebben. Echter, voor de verbinding met en de onderbouwing van wiskundige intuïtie is het niet noodzakelijk dat Brown's argumenten worden geaccepteerd, zoals aan het einde van het hoofdstuk duidelijk zal worden gemaakt.

d) De relatie tot wiskundige intuïtie

Dat plaatjes als bewijs zouden moeten kunnen dienen in de wiskunde is op het eerste gezicht niet verbonden met wiskundige intuïtie. Brown vraagt zich echter op enig moment af, hoe het kan dat de wiskundige plaatjes fungeren als bewijs. Hij zegt hierover:

> Consequently, I claim, some 'pictures' are not really pictures, but rather are windows to Plato's heaven.[49]

> As telescopes help the unaided eye, so some diagrams are instruments (rather than representations) which

47 Brown, 1997, pp.165
48 Brown, 1997, pp.166
49 Brown, 1997, pp.174

help the unaided mind's eye.[50]

Het gebruik van plaatjes als bewijzen sluit uitstekend aan bij het verkrijgen van wiskundige kennis met ons 'geestesoog', die op een imperfecte manier de platoonse wiskundige objecten aanschouwt, als een soort van empirische observatie. Dit sluit dan weer goed aan bij hoe wij tot nog toe Gödel's wiskundige intuïtie hebben begrepen. Het lijkt dat het gebruik van plaatjes als bewijsmethode in de wiskunde, epistemologisch alleen maar kan worden begrepen als de wiskundige intuïtie die ineens een scherp beeld krijgt van de objecten die ze probeert te schouwen. Brown voelt zich genoodzaakt tot deze metaforen om de werking van de plaatjes als bewijzen te kunnen weergeven. Brown heeft deze metaforen nodig omdat de werking van de plaatjes, naar zijn idee, niet anders valt uit te leggen.

Dit helpt de verdediger van wiskundige intuïtie op twee manieren. Ten eerste, de directe argumentatie, als iemand ervan overtuigt is dat plaatjes inderdaad als wiskundig bewijs kunnen dienen en dit enkel mogelijk is als we het bestaan moeten onderkennen van wiskundige intuïtie, dan is er voor deze persoon dus een goede reden voor het aannemen van wiskundige intuïtie. Een tweede, indirect argument voor de voorstander van wiskundige intuïtie is dat de vraag naar wiskundige intuïtie niet enkel een vraag naar de metafysische fundamenten van de wiskunde kan oplossen, waarbij de kans bestaat dat de oplossing pasgesneden wordt op het probleem. Deze verdenking wordt dankzij Brown's artikel weggenomen. Wiskundige intuïtie is een kwestie die niet enkel verband houdt met de ontologie van de wiskunde, ze houdt ook verband met de geldigheid en waardering van specifieke bewijsvormen binnen de wiskunde. Wiskundige intuïtie blijkt ook een onderwerp te zijn dat impact heeft op de wiskundige praktijk. Dit maakt wiskundige intuïtie als antwoord op het ontologische probleem op zijn minst een stuk minder verdacht en waardiger voor verder onderzoek. De vraag naar wiskundige intuïtie bevind zich in het goede gezelschap met de vraag naar de geldigheid van plaatjes als bewijzen.

50 Brown, 1997, pp.174

H6: Zicht of Herinneren

a) Twee kleinere problemen

Met de voorgaande hoofdstukken is de lezer hopelijk overtuigd geraakt dat de tegenargumenten tegen wiskundige intuïtie die besproken zijn door de Gödeliaan goed kunnen worden gecounterd. Echter, de lezer kan alsnog met een ontevreden gevoel achterblijven. Hoewel we hebben geprobeerd om wiskundige intuïtie zo concreet mogelijk te maken, blijven we steken bij het verwerpen van tegenargumenten door het opsommen van effecten op de wiskundige praktijk en het benoemen dat wiskundige kennis geen 'normale' vorm van kennis is. Als wiskundige intuïtie zoveel zeggend is, waarom kunnen we dan onze vinger niet op de kern leggen. Voor een gedeelte mag dit verwacht worden, wiskundige kennis heeft altijd al een air van mysterie om zich heen gehad, al vanaf het cijfer-mysticisme van Pythagoras[51], bij wie getallen het diepst mogelijke inzicht in de wereld gaven, tot de abstracte tijdloze objecten die 'rondzweven' bij hedendaagse platonisten. Maar desondanks blijft de metafoor vaag, want in welke zin lijkt wiskundige intuïtie op een zintuig en in welke zin doet het dat niet?

Wat ook knaagt is dat het nog onduidelijk is hoe verstrengeld wiskundige intuïtie is met wiskundig platonisme. Het is niet direct duidelijk dat er alternatieven zijn voor de wiskundig platonist. Het zou zo kunnen zijn dat wiskundige intuïtie de enige mogelijke epistemologie is, wat de vraag oproept of al de effecten van wiskundige intuïtie op de wiskundige praktijk niet 'eigenlijk' effecten zijn van wiskundig platonisme.

b) Plato over wiskundige kennis in de Meno

Om te proberen het ongenoegen van deze problemen te verminderen, zullen we kort een passage van Plato bespreken uit de Meno[52]. In deze passage geeft Plato (door het karakter van Socrates) een beeld van hoe hij denkt dat mensen kennis hebben van wiskunde, door een wiskundige vraag te stellen aan één van de slaven van Meno, de tegenspeler van Socrates in deze dialoog.

> MENO: Yes, Socrates; but what do you mean by saying that we do not learn, and that what we call learning is only a process of recollection? Can you teach me how this is?
>
> SOCRATES: I told you, Meno, just now that you were a rogue, and now you ask whether I can teach you, when I am saying that there is no teaching, but only recollection; and thus you imagine that you will involve me in a contradiction.
>
> MENO: Indeed, Socrates, I protest that I had no such intention. I only asked the question from habit; but if you can prove to me that what you say is true, I wish that you would.
>
> SOCRATES: It will be no easy matter, but I will try to please you to the utmost of my power. Suppose that you call one of your numerous attendants, that I may demonstrate on him.
>
> MENO: Certainly. Come hither, boy.
>
> SOCRATES: He is Greek, and speaks Greek, does he not?
>
> MENO: Yes, indeed; he was born in the house.
>
> SOCRATES: Attend now to the questions which I ask him, and observe whether he learns of me or only remembers.

51 Burton, 2011, pp.93
52 Plato, (2008)

MENO: I will.[53]

Wat volgt is een serie vragen over een wiskundig probleem, eerst geeft de slaaf een volledig verkeerd antwoord aan Socrates, waarna Socrates doorgaat met het stellen van vragen. De verdere vragen doen de slaaf tot het inzicht komen dat hij een verkeerd antwoord heeft gegeven. Verdere vragen leiden hem tot een nieuw antwoord, wat wederom na verdere vragen foutief blijkt te zijn, tot uiteindelijk de slaaf tot het correcte inzicht komt. Belangrijk hierbij is wat Socrates opmerkt:

> SOCRATES: Do you observe, Meno, that I am not teaching the boy anything, but only asking him questions; [….][54]

Nadat de slaaf zijn verkeerde antwoord heeft gegeven stelt Socrates dat hij de slaaf enkel zijn gemaakte stappen zal voorleggen en op deze manier de slaaf te laten inzien 'wat hij eigenlijk al die tijd al wist'.

> SOCRATES: Observe him while he recalls the steps in regular order. (To the Boy:) Tell me, boy, do you assert that a double space comes from a double line? Remember that I am not speaking of an oblong, but of a figure equal every way, and twice the size of this—that is to say of eight feet; and I want to know whether you still say that a double square comes from double line?

We zien hier dat bij Plato de belangrijkste metafoor voor het uitleggen van wiskundige kennis niet zicht is, maar herinnering. We zien ook dat één van de redenen om herinneren als metafoor te nemen, is dat een persoon die het verkeerd heeft over wiskunde, enkel bij zichzelf te rade hoeft te gaan om tot inzicht te komen.[55] Als we de metafoor breder trekken, zien we dat herinneringen een uitstekende manier zijn om te begrijpen hoe we wiskundige fouten kunnen begrijpen. Als ik een fout maak in de wiskunde dan is dit goed te begrijpen als het hebben van een verkeerde herinnering. 'Fout herinneren' is iets wat iedereen gedurende zijn leven wel heeft meegemaakt.

c) Twee verschillende epistemologieën van wiskundige objecten en hoe deze kernachtig verschillen

Plato's ideeën helpen de Gödeliaan en de lezer die geïnteresseerd is in wiskundige intuïtie. Ten eerste kan duidelijk worden gemaakt dat wiskundige intuïtie verschilt van Plato's ideeën, wat betekent dat wiskundige intuïtie niet het noodzakelijke uitvloeisel van platonisme aangaande wiskundige objecten is. Maar bij het schetsen van de verschillen tussen de twee opvattingen zullen we zien dat we de vage metafoor, die we gebruikt hebben om wiskundige intuïtie te begrijpen, meer kunnen specificeren. Dit doen we door de twee opvattingen naast elkaar te leggen op basis van hoe ze zich verhouden tot de besproken Continuümhypothese.

Zoals we hebben gezien, voor Gödel heeft wiskundige intuïtie de functie om te verklaren dat we nog niet weten hoe het zit met de Continuümhypothese. Immers, er zijn bijzonder veel wiskundige objecten en we hoeven niet te verwachten dat we ze allemaal al gezien hebben noch dat we ze allemaal perfect gezien hebben. Vergelijk het met het kijken naar een boom. Hoewel geen enkele van mijn indrukken van de boom verkeerd zijn, heb ik nog lang niet genoeg informatie over de boom om te stellen dat ik er veel van weet. Ik moet eromheen lopen, de boom van meerdere kanten bekijken, een vergrootglas pakken, dichterbij gaan staan, afstand nemen etc. Elk van deze acties geeft me weer een beter beeld op de boom. Mijn kennis van de boom neemt toe met elke observatie die ik doe, maar op geen enkel punt heb ik 'genoeg' naar de boom gekeken.

De metafoor van het herinneren komt minder goed tegemoet aan de problematiek van de onbewijsbare Continuümhypothese. Heb ik heel specifiek over de Continuümhypothese dan

53 Plato, (2008)
54 Plato, (2008)
55 Silverman, A. (Fall 2014 Edition)

nauwelijks nog herinneringen? Hoe kan het dat als we ons bezig houden met de Continuümhypothese, we niet alleen weten dat we hem niet kunnen afleiden, maar ook niet eens een vaag vermoeden hebben over de waarheid ervan? Hier vallen vast antwoorden op te geven, maar het is duidelijk dat de zicht-metafoor meer pas is gesneden om met dit probleem om te gaan.

Laten we het anders stellen, bij wiskundige intuïtie weten we een hele hoop dingen nog niet. We moeten op onderzoek uitgaan, de platoonse objecten op steeds andere manieren bekijken om zo een steeds completer, maar nooit volledig, plaatje te vormen van de platoonse objecten. Dit in tegenstelling tot Plato, bij wie de wiskundige kennis 'eigenlijk' altijd al in zijn geheel gekend is, we hoeven ons enkel bezig te houden met het expliciet maken van al deze impliciete kennis. Het loopt analoog met het verschil in methode tussen natuurwetenschappers en de scholastici. Bij de natuurwetenschapper is het belangrijk om continu nieuwe informatie over de wereld te blijven verzamelen om op die manier onze kennis erover te vergroten, net zoals bij Gödel's wiskundige intuïtie. Bij de scholasticus is alle kennis al gegeven, we hoeven niet naar de wereld te kijken, we moeten enkel de boeken lezen waar alle kennis verzameld is. De methode is om de Bijbel, Aristoteles en de commentatoren erop te lezen, interpreteren en herinterpreteren, totdat eindelijk de waarheid die in deze teksten verscholen zit naar boven is gekomen, zoals bij Plato de slaaf ook zijn herinnering aan de wiskundige objecten moet blijven oppoetsen tot hij eindelijk tot kennis komt.

Dit betekent niet alleen dat er meerdere epistemologieën van platoonse objecten mogelijk zijn, we weten ook meer over wiskundige intuïtie. Essentieel aan de zicht-metafoor is dat zicht incomplete en onvolledige kennis oplevert en dat zicht nieuwe kennis kan opleveren. Het vertelt ons dat wiskundige kennis niet al impliciet bekend is en dat de hoeveelheid wiskundige kennis altijd vergroot kan worden. Er zijn altijd wiskundige stellingen die onbekend zullen zijn en ontdekt kunnen worden, onze wiskundige kennis is incompleet. Of zoals we Gödel er zelf al naar hebben zien hinten:

> […] and [the mathematical realm] is only perceived, and probably perceived very incompletely, by the human mind.[56]

56 Gödel, 1951, pp.323

Conclusie

Wiskundige intuïtie zoals door Gödel beschreven blijkt een houdbaarder en sterker begrip te zijn dan dat het wellicht op het eerste gezicht lijkt. Zoals Chihara zegt, roept het herinneringen op aan mystieke ervaringen en lijkt het zonder concrete gevolgen enkel als oplossing te dienen voor één specifiek probleem. Benacerraf merkt terecht op dat wiskundige intuïtie niet strookt met de manier waarop wij gewend zijn kennis te bezien en daarmee lijkt wiskundige intuïtie contra-intuïtief. Het is echter doorheen de scriptie gebleken dat de Gödeliaan wel degelijk de middelen heeft om deze aanval mee te weren. Kwesties zoals wat we moeten verwachten van concrete wiskundige problemen, zoals de Continuümhypothese, blijken afhankelijk te zijn van ons antwoord op de vraag of wiskundige intuïtie bestaat. De eerste onvolledigheidsstelling maakt dat er een reden is om te veronderstellen dat wiskunde wellicht inderdaad een andere vorm van kennis is dan onze alledaagse kennis. Ten slotte vonden we in de vraag naar het gebruik van wiskundige plaatjes niet alleen een direct argument voor wiskundige intuïtie, maar ook zagen we wederom de praktische consequenties die een dergelijke theorie zou hebben.

Daarnaast hebben we ons begrip van wiskundige intuïtie verdiept door het af te zetten tegen Plato's ideeën over wiskundige kennis zoals we die vinden in de Meno.

Met deze argumenten hoop ik te hebben kunnen laten zien dat wiskundige intuïtie lang zo onhoudbaar niet is als het wellicht op het eerste gezicht lijkt te zijn. Hoewel de Gödeliaan zeker nog op onduidelijkheid en gebrek aan direct bewijs kan worden aangevallen, kan de Gödeliaan niet worden verweten een te exotische, onhoudbare, niet filosofische theorie aan te hangen.

Literatuurlijst:

- Benacerraf, P. (1973). Mathematical Truth. *The Journal of Philosophy, 70*(19), 661-679. Retrieved August 17, 2014, from http://www.jstor.org/stable/2025075
- Brown, J. (1997). Proofs and pictures. *The British Journal for the Philosophy of Science, 48*, 161-180. Retrieved July 7, 2014, from http://bjps.oxfordjournals.org/
- Brown, J. (1999/2008). *Philosophy of Mathematics A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures* (2nd ed.). New York, NY: Routledge.
- Burton, D. (2011). *The History of Mathematics An Introduction* (7th ed.). New York, NY: The Macgraw-Hill.
- Chihara, C. (1982). A Godelian Thesis Regarding Mathematical Objects: Do They Exist? and Can We Perceive Them? *The Philosophical Review, 91*(2), 211-227. Retrieved August 14, 2014, from http://www.jstor.org/stable/2184627
- De Swart, H. (1989). *Filosofie van de wiskunde.* Leiden: Uitgeverij Martinus Nijhoff.
- De Swart, H. (1993). *Logic: Mathematics, language, computer science, and philosophy* (pp. i-577). Frankfurt am Main, Berlin, Bern, New York, Paris, Vienna: Peter Lang.
- Ferreirós, José, "The Early Development of Set Theory", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2012/entries/settheory-early/>.
- Gödel, K. (1995). Some basic theorems on the foundations of mathematics and their implications *(1951). In S. Feferman (Ed.), *Collected works* (Vol. 3, 304-323). New York: Oxford University press.
- Gödel, K. (1995). What is Cantor's continuum problem? (1964). In S. Feferman (Ed.), *Collected works* (Vol. 2, 254-270). New York: Oxford University press.
- Horsten, Leon, "Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2015 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/spr2015/entries/philosophy-mathematics/>.
- Hume, D. (2008). *An Enquiry concerning Human Understanding* (2nd ed.). Oxford: Oxford University press.
- Kant, I., Trans. Veenbaas, J., & Trans. Visser, W. (2004). *Kritiek van de zuivere rede*. Amsterdam: Uitgeverij Boom.
- Linnebo, Øystein, "Platonism in the Philosophy of Mathematics Supplement", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/platonism-mathematics/supplement.html>

- Linnebo, Øystein, "Platonism in the Philosophy of Mathematics", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2013 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/win2013/entries/platonism-mathematics/>
- Maddy, P. (1989). The Roots of Contemporary Platonism. *The Journal of Symbolic Logic,54*(4), 1121-1144. Retrieved July 7, 2014, from http://www.jstor.org/stable/2274809
- Silverman, Allan, "Plato's Middle Period Metaphysics and Epistemology", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2014 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2014/entries/plato-metaphysics/>.
- Smith, P. (2007/2013). *An introduction to Gödel's Theorems* (2nd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.
- Parsons, C. (1995). Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought. *The Bulletin of Symbolic Logic, 1*(1), 44-74. Retrieved July 7, 2014, from http://www.jstor.org/stable/420946
- Plato, Trans: Jowett, B. (2008). *Meno*. The Project Gutenberg. URL = http://www.gutenberg.org/files/1643/1643-h/1643-h.htm