

Hilberts programma en Gödels onvolledigheidsstellingen

Wim Mol

27 september 2015

Theoretische filosofie
Bachelor wijsbegeerte
10 ECTS

Begeleider: Prof.dr. H.C.M. de Swart

Adviseur: Prof.dr. J.A. van Ruler

$\approx$ 10800 woorden

Inhoudsopgave

Inleiding	3
1 Hilberts programma	5
1.1 Hilbert en Kronecker	5
1.2 Brouwers intuïtionisme	8
1.3 Hilberts programma	10
1.4 Brouwers kritiek op Hilbert	13
2 Formeel geaxiomatiseerde systemen van de rekenkunde	14
2.1 Preliminare concepten	14
2.1.1 Algoritmes	14
2.1.2 Functies	15
2.1.3 Effectieve beslisbaarheid	15
2.2 Een formele taal	16
2.3 Geaxiomatiseerde systemen	18
2.4 Waarom een formeel systeem?	19
3 Gödels onvolledigheidsstellingen	21
3.1 Nogmaals Hilbert en Brouwer over consistentie	21
3.2 Uitbreidingen van PA	21
3.3 De onvolledigheidsstellingen	22
3.4 Verwijzen naar zinnen in PA	23
4 Na Hilberts programma	25
4.1 Het einde van Hilberts programma	25
4.2 Na Hilberts programma	25
Bronnenlijst	27

Inleiding

Na een aantal grote vooruitgangen in de logica en de uitvinding van de verzamelingenleer aan het eind van de negentiende eeuw hoopten een aantal wiskundigen en filosofen dat zij nu met behulp van die uitvindingen een aantal filosofische vragen over de aard van de wiskunde konden beantwoorden. Waar gaan wiskundige uitspraken over? Hoe rechtvaardigen we ze? Dergelijke vragen werden ook meer urgentie gegeven door andere wiskundige ontwikkelingen. Zo werd het duidelijk dat niet-euclidische ruimtes logisch consistent waren en dat het mogelijk was om allerlei specifieke vragen over oneindige verzamelingen te beantwoorden. Eén poging om deze vragen te beantwoorden was Hilberts programma. Dit programma, geleid door Hilbert, hoopte de wiskunde op te delen in een inhoudelijk en een ideëel deel. Het inhoudelijke gedeelte moest onbetwistbaar en letterlijk waar zijn. Op basis van dit inhoudelijke gedeelte moesten dan weer controversiële ideële uitbreidingen gerechtvaardigd worden. Dit programma is, in zijn oorspronkelijke vorm, onhoudbaar. Dit volgt uit Gödels twee onvolledigheidsstellingen. Het doel van deze scriptie is Hilberts programma te schetsen en uit te leggen hoe dat is ontkracht door Gödels onvolledigheidsstellingen. Hierbij zal een focus liggen op het verschil tussen Hilberts programma en de opvattingen van Brouwer.

In hoofdstuk 1 zullen de filosofische opvattingen en motivaties van Hilbert worden besproken en zal worden uitgelegd in welke zin die een reactie waren op opvattingen van Kronecker en Brouwer. Kronecker en Brouwer waren wiskundigen en filosofen met sterke twijfels bij veel wiskundige stellingen, hoofdzakelijk over oneindige verzamelingen. Hilbert vreesde dat dergelijke twijfels het vergaren van wiskundige kennis onnodig zouden beperken. We zullen hierbij de nadruk leggen op het verschil tussen de taalfilosofische opvattingen van Hilbert en Brouwer. Zo hadden zij andere opvattingen over wat het betekende te zeggen dat een uitspraak, of een aantal uitspraken, consistent zijn. We zullen uitleggen hoe volgens Hilbert consistentie een syntactische eigenschap van een uitspraak is, terwijl Brouwer meende dat het een semantische eigenschap is.

In hoofdstuk 2 zullen we de belangrijkste eigenschappen van een formeel systeem uiteenzetten. Hiermee worden de concepten geïntroduceerd die nodig zijn om Gödels onvolledigheidsstellingen te begrijpen en die ons in staat stellen Hilberts programma verder toe te lichten.

In hoofdstuk 3 zullen we de eerste en tweede onvolledigheidsstelling uiteenzetten en een schets geven van het bewijs daarvan. Het zal blijken dat Hilberts idee om consistentie als een puur syntactische eigenschap te zien geen stand houdt.

In hoofdstuk 4 wordt kort de gevolgen van Gödels onvolledigheidsstellingen voor het filosofisch debat aangaande de wiskunde worden besproken. Er zal worden uitgelegd waarom sindsdien door veel wiskundigen en filosofen de ontologische implicaties van het platonisme worden geaccepteerd.

Deze scriptie zou begrijpelijk moeten zijn voor de gemiddelde tweedejaarsstudent filosofie. Hierbij is uitgegaan van een minimale wiskundige kennis die de studenten op de middelbare school hebben opgedaan en van een minimale

kennis van de propositie en predicatenlogica. Bij de studie filosofie aan de Erasmus Universiteit waar deze scriptie ook is geschreven wordt dus uitgegaan van een student met een wiskundige voorkennis die een gemiddelde universitair student heeft en die de vakken propositielogica en predicatenlogica met succes heeft afgerond.

1 Hilberts programma

In dit hoofdstuk zullen de voornaamste elementen van Hilberts programma uiteen worden gezet. Hilbert zal worden besproken in relatie tot Kronecker en Brouwer. We zullen ons eerst met de opvattingen van Kronecker en Brouwer bezighouden om aan de hand daarvan de motivatie en filosofische basis van Hilberts eigen programma te beschrijven. Verder zal een centraal conflict tussen de taalfilosofische opvattingen van Hilbert en Brouwer naar voren worden gebracht. In latere hoofdstukken zal worden uitgelegd hoe dit conflict door Gödels tweede onvolledigheidsstelling wordt beslist in het nadeel van Hilbert.

1.1 Hilbert en Kronecker

Rond het einde van de negentiende eeuw ontwikkelde Cantor de verzamelingenleer en legde Frege de fundamenteen voor de moderne logica. Dit maakte een nieuwe systematische manier mogelijk om naar fundamentele wiskundige vragen te kijken. De meer controversiële conclusies van Cantor gaven daar ook aanleiding toe. Verscheidene wiskundigen en filosofen waaronder Frege, Russell en Whitehead, Peano en Zermelo hebben geprobeerd de zogenoemde fundamenteen van de wiskunde te beschrijven. Ook Hilbert probeerde dit.

Hilbert zag zichzelf in de eerste plaats als wiskundige en als wiskundige hield hij zich ook bezig met aanverwante vakgebieden zoals natuurkunde en epistemologie.¹ Hilbert maakte zich zorgen over de posities van andere wiskundigen en filosofen. In het bijzonder verzette hij zich tegen Kronecker en later Brouwer. Zowel Kronecker als Brouwer

Kronecker was een negentiende eeuwse wiskundige die grote twijfels had bij veel wiskunde uit zijn eigen tijd. De positie die Kronecker verdedigde kan samengevat worden in de uitspraak:

God schiep de gehele getallen, al het andere is mensenwerk.²

Hiermee neemt Kronecker een idealistische positie in aangaande het merendeel van de wiskunde. De gehele getallen zijn weliswaar onproblematisch gegeven, ingewikkelder zaken zoals breuken, of het getal $\sqrt{2}$ door de menselijke geest werden geschapen, al dan niet met de gehele getallen als bouwblokken. Verder nam hij aan dat de menselijke geest slechts een eindig aantal operaties uit zou kunnen voeren. De wiskunde waarvoor een concept van oneindigheid noodzakelijk is verwierp hij dan ook. Hij meende dat alle wiskundige operaties en concepten uit een eindig aantal stappen en onderdelen moesten bestaan. Hierbij werd geaccepteerd dat het mogelijk was dat er bij iedere eindige hoeveelheid getallen er altijd meer getallen konden zijn. Dus van de gehele getallen accepteerde Kronecker in zekere zin dat er oneindig veel waren.

Kronecker was in zijn tijd, het einde van de negentiende eeuw, zeer invloedrijk. In deze periode werd een aantal stellingen aangaande oneindige verza-

¹Hilbert 1918, paragraaf 1

²Kronecker heeft deze uitspraak, of een variant erop, waarschijnlijk gedaan in een ongepubliceerde toespraak in 1886. Voor verdere informatie zie: Ewald 1996, p942, noot a.

melingen bewezen door de negentiende eeuwse wiskundige Cantor. Zo bewees Cantor dat bij oneindige verzamelingen een verzameling V even groot kon zijn als een strikte deelverzameling van V . Verder bewees hij dat de verzameling van de natuurlijke getallen (De verzameling van nul en de gehele positieve getallen: 0, 1, 2, 3 ... enzovoorts, die we zullen afkorten als $\mathbb{N}$), kleiner is dan de machtsverzameling van $\mathbb{N}$. Dat is de verzameling van alle deelverzamelingen van $\mathbb{N}$. Dergelijke stellingen roepen vragen op over de manier waarop oneindigheid begrepen moet worden. We kunnen de oneindigheid van de natuurlijke getallen begrijpen door te zeggen dat voor iedere eindige verzameling natuurlijke getallen weer een nieuw natuurlijk getal genoemd kan worden dat niet in die verzameling zit. Iedere eindige verzameling natuurlijke getallen heeft immers een grootste element en daar kunnen we 1 bij optellen en dan hebben we een nieuw natuurlijk getal. Op een soortgelijke manier kunnen we de oneindigheid van de even getallen begrijpen. Wanneer we echter gaan redeneren over de machtsverzameling van $\mathbb{N}$ krijgen we te maken met oneindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$ die bestaan uit willekeurige natuurlijke getallen die wellicht geen beschrijfbare eigenschap met elkaar gemeen hebben behalve dat ze in die specifieke verzameling zitten. We kunnen de elementen van zo'n verzameling ook niet één voor één opnoemen aangezien het een oneindige verzameling is. De notie van een machtsverzameling van $\mathbb{N}$ lijkt te veronderstellen dat oneindige verzamelingen gewoon bestaan, onafhankelijk van ons, en dat wij daar op een zinnige manier over kunnen redeneren. Sommige wiskundigen zoals bijvoorbeeld Kronecker wilden daar niet in meegaan. Volgens hem moest een wiskundige in staat zijn uit te leggen hoe hij een bepaalde verzameling had geconstrueerd. Als dat niet lukte was de verzameling ongedacht en aangezien wiskundige concepten behalve de gehele getallen enkel in het hoofd van de wiskundige bestond kon zo'n verzameling volgens Kronecker niet bestaan. Hoewel Cantor zijn ideeën over verzamelingen al vanaf 1874 begon te publiceren werd het concept nauwelijks serieus genomen tot aan het begin van de twintigste eeuw toen invloedrijke wiskundigen zoals Hilbert, Russell en Zermelo de verzamelingenleer verdedigden en systematiseerden. De invloed van Kronecker zorgde ervoor dat Cantor weinig succes of erkenning kreeg in de academische wereld van de negentiende eeuw.³

En de verzamelingenleer was niet de enige tak van de wiskunde waarover Kronecker zich pessimistisch opstelde. De analyse is de tak van de wiskunde die zich, kort door de bocht genomen, bezig houdt met limieten, differentiëren en integreren. Dit vakgebied is, sinds Newton en Leibniz het ontdekten, enigszins controversieel geweest. Dit vakgebied is ook, zoals Hilbert aangeeft, onmisbaar voor allerlei wiskundige toepassing zoals vrijwel alle moderne natuurkunde. We zullen proberen de technische definities en bewijzen zoveel mogelijk achterwege te laten. Een eenvoudig probleem in de analyse is dat van de snelheid van een bewegend object. Wanneer een auto met een constante snelheid over een rechte weg rijdt en hij is om drie uur nog 100 kilometer van zijn bestemming af en om vier uur komt hij aan zeggen we dat hij 100 kilometer per uur reed. Maar wat nu

³Burton 1999, p682-683

als de auto niet met een constante snelheid reed? Kunnen we dan niet zeggen dat hij toch op ieder gegeven moment met een bepaalde snelheid reed. De oplossing die Newton en Leibniz hiervoor hadden was om te berekenen wat de afstand zou zijn die de auto in een kleinst mogelijke hoeveelheid tijd af zou leggen vanaf een bepaald punt. Dit werd een infinitesemale hoeveelheid genoemd. Hier werd door critici zoals Berkeley en Nieuwentijdt fel tegen geprotesteerd.⁴ De kleinst mogelijke hoeveelheid tijd kon volgens hen enkel worden opgevat als helemaal geen tijd. In dat geval zouden we kunnen zeggen dat de auto in 0 seconden 0 meter aflegde. Maar dit is waar ongeacht hoe snel de auto gaat en vertelt ons niets nuttigs. En de kleinste tijdseenheid groter dan nul klonk de critici al even problematisch in de oren. Wat zou ons immers tegenhouden een half zo lange tijdseenheid te nemen? In de negentiende eeuw werd de analyse door wiskundigen als Cantor, Weierstrass en Dedekind gefundeerd zonder de problematische infinitesemaal kleine afstanden. In plaats daarvan gebruikten zij een ander idee. Wanneer we de tijd die we de auto laten rijden vanaf een bepaald punt steeds korter maken zal zijn gemiddelde snelheid gedurende die tijd steeds dichter naar een bepaalde snelheid gaan en die snelheid noemen we zijn snelheid op dat punt. Hoewel veel wiskundigen blij waren met het nieuwe fundament voor het vruchtbare vakgebied van de analyse was Kronecker niet overtuigd. De nieuwe analyse berustte immers op oneindigheden waarvan Kronecker niet dacht dat ze geconstrueerd konden worden.⁵

Kroneckers wantrouwen richting de analyse en de verzamelingenleer was voor Hilbert één van de voornaamste zorgen. De analyse is in de wiskunde en haar toepassingen een zeer belangrijk vakgebied. Ze wordt gebruikt om over de snelheid en versnelling van allerlei lichamen dingen uit te rekenen en is daardoor onmisbaar in de moderne natuurkunde. Ook kan men, door het zoeken van plekken waarop de snelheid van bepaalde functies nul is, een tal van optimaliseringsproblemen oplossen.

Deze overwegingen geven enig inzicht in Hilberts motivaties. Hilbert beschrijft Kronecker als een 'dictator'⁶ die, om volgens Hilbert slechte redenen, grote gedeeltes van de wiskunde en haar toepassingen wil verbieden. Hilbert somt op:

Kronecker's ideas terminate in such an extreme position; and his consistency is a service he has rendered, which one may acknowledge without following him. To proceed in this way is to throw the baby out with the bathwater. The irrational number; the theory of functions; the whole of analysis with its finely developed results; physics; and finally the theory of sets- these are the most magnificent fruits of mathematical knowledge; they are indispensable.⁷

Hilbert was zeer onder de indruk van Cantors verzamelingenleer die voor een groter inzicht in tal van wiskundige onderwerpen zorgde. Hierover zei hij:

⁴Berkeley 1901 [1707], paragraaf 4 en 5

⁵Ewald 1996, p942

⁶Hilbert 1920, p943 in Ewald 1996

⁷Hilbert 1920, p943

No one shall drive us out of the paradise which Cantor has created for us.⁸

Eén van Hilberts drijfveren was, zo zien we hier, een verzet tegen node-loos beperkende wiskunde van 'dictators' als Kronecker. Hij hoopte met een rigoreuze fundering van de wiskunde een eind te maken aan de twijfels die sommige wiskundigen hadden bij belangrijke delen van de wiskunde.

1.2 Brouwers intuïtionisme

Kronecker overleed in 1891 en in de jaren twintig van de twintigste eeuw waren andere opvattingen over de aard van de wiskunde invloedrijker geworden. Vooral die van L.E.J. Brouwer. Hilbert ziet Brouwer als een gematigde variant op Kronecker.⁹ Dit is in zoverre waar, dat Brouwer een aantal van de skeptische en revisionistische opvattingen van Kronecker overneemt en ook een enigszins vergelijkbaar constructivisme verdedigt. Desalniettemin zijn er grote verschillen tussen de twee. Beiden hebben allebei een elementair bouwblok waaruit de rest van de wiskunde geconstrueerd moet worden maar ze verschillen van mening over wat dat bouwblok moet zijn.

We zullen twee onderdelen van Brouwers filosofie beschrijven. Ten eerste zijn idealisme. Wiskundige objecten zijn een product van de menselijke geest. Hieruit concludeert hij dat de menselijke geest ook alleen dingen kan bewijzen over wiskundige objecten als hij/zij die al heeft geconstrueerd. Uiteindelijk kan alle wiskunde volgens Brouwer worden geconstrueerd uit een oerintuïtie van tijd. Hiermee wijkt hij af van Kronecker die alle wiskunde uit de gehele getallen wil construeren. Het idee om wiskunde te construeren uit een notie van tijd komt van Kant. Die verdedigde dat wiskundige kennis verklaart werd uit ons inzicht in de aanschouwingsvormen van ruimte en tijd.¹⁰ Door een aantal ontwikkelingen in de meetkunde had Brouwer echter geen vertrouwen meer in ruimte als fundamentele notie voor de wiskunde dus meende hij dat alle wiskunde geconstrueerd was uit een oerintuïtie van tijd.

Brouwers idealisme heeft gevolgen voor zijn taalfilosofie. Dit is het tweede onderdeel van zijn filosofie waar wij op in zullen gaan. Brouwer geloofde niet in concepten onafhankelijk van de mens. Het zijn gedachten die waar of onwaar zijn en waar wiskunde zich mee bezig houdt. De taal kan die gedachten hooguit imperfect uitdrukken. Hiermee onderscheidde Brouwer zich van wat hij beschouwde als het formalisme van Hilbert en Russell. Hij had weinig vertrouwen in het soort formele systemen dat in de logica wordt bestudeerd. Dit waren immers enkel systemen van taal maar Brouwer verwachtte niet dat de taal precies genoeg kon zijn om er de wiskunde volledig mee te beschrijven. Taal was voor Brouwer enkel een manier om te communiceren, dat houdt in het geval van de wiskunde in een manier om dezelfde wiskundige constructies bij anderen te weeg te brengen als bij de spreker. Hierdoor had Brouwer ook

⁸Hilbert 1926

⁹Hilbert 1922, paragraaf 10

¹⁰Kant 1781/1787, A38-39 B55-56

weinig vertrouwen of interesse in de formele logica. Hij zag dit als een zinloos taalspel dat pas na de inhoudelijke wiskunde kwam. Daarbij geloofde hij niet in een aantal klassieke stellingen en axioma's van de logica zoals de wet van uitgesloten derde. Deze was, zo meende Brouwer, niet van toepassing behalve op al bewust geconstrueerde wiskundige objecten. Een wiskundig object kreeg volgens Brouwer pas een bepaalde eigenschap als de menselijke geest dat object en die eigenschap construeerden. Voordat dit gedaan was zou je niet naar waarheid kunnen zeggen dat dit wiskundige object die eigenschap had, maar ook niet dat het die niet had.

We zullen nu een voorbeeld geven hoe Brouwers idealisme in een concreet wiskundig bewijs een beroep op de wet van de uitgesloten derde verwerpt. Dit soort bewijzen heten non-constructief. Stel een wiskundige wil bewijzen dat er een irrationaal getal is. Dat wil zeggen een getal dat niet als een breuk van twee gehele getallen is te schrijven. Dan kan hij bewijzen dat $\sqrt{2}$ zo'n getal is. Dit bewijs is constructief omdat het niet alleen bewijst dat er irrationale getallen bestaan maar ons ook zo'n irrationaal getal levert. Beschouw nu het volgende bewijs. We bewijzen dat er irrationale getallen a en b zijn zodanig dat a^b is rationaal.

Bewijs. We weten dat $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. Het getal 2 is rationaal. We weten ook dat $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ is rationaal of irrationaal. In het eerste geval, kies $a = b = \sqrt{2}$. In het tweede geval kies $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ en $b = \sqrt{2}$. $\square$

Dit bewijs toont weliswaar aan dat er twee irrationale getallen a en b bestaan zodanig dat a^b rationaal is maar het maakt niet duidelijk welke twee getallen dat dan wel zijn. Daarom noemen we dit bewijs non-constructief. De specifieke getallen die de eigenschap hebben die we eraan toeschrijven zijn niet geconstrueerd, of specifieker, het hebben van die eigenschap is niet geconstrueerd. Non-constructieve bewijzen maken gebruik van de wet van de uitgesloten derde die zegt dat voor iedere zin ϕ geldt $\phi \vee \neg\phi$. Door te bewijzen dat het tegenstrijdig zou zijn als een bepaalde wiskundige entiteit niet zou bestaan concluderen wiskundigen met behulp van de wet van de uitgesloten derde dat die entiteit wel bestaat. In het voorbeeld hierboven zou Brouwer niet willen zeggen dat $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationaal of irrationaal is. Totdat de menselijke geest een van beiden bewijst kunnen we daar niet vanuit gaan. Sinds Brouwer zijn er in de wiskunde verscheidene constructivistische projecten en onderzoeken geweest. Wat al deze onderzoeken gemeen hebben is dat zij de wet van de uitgesloten derde niet veronderstellen of zelfs verwerpen.

Brouwer verwerpt ook het keuzeaxioma. Dit is een axioma over verzamelingen voor het eerst geformuleerd door Zermelo in 1904. Dit axioma kan op een aantal manieren verwoord worden. Een inzichtelijke manier is de volgende:

Keuze-axioma 1. *Neem een niet-lege verzameling A met daarin enkel andere niet-lege verzamelingen. Bij twee willekeurige verzamelingen in A zeggen we dat ze geen elementen gemeen mogen hebben. Nu bestaat er volgens het keuzeaxioma*

een verzameling B zodanig dat voor iedere verzameling x in A geldt dat er precies één element van x in A zit.

Wat voor onze doeleinden belangrijk is, is dat het keuzeaxioma zegt dat er bepaalde verzamelingen bestaan zonder die verzamelingen ook daadwerkelijk te geven. Als we dit axioma combineren met het soort oneindige verzamelingen waar Cantor zich mee bezig hield volgt hier het bestaan van bepaalde verzamelingen uit die onmogelijk te construeren zijn. Dit axioma is erg belangrijk in de hedendaagse wiskunde. Niettemin wordt het verworpen door de constructivisten aangezien het de wet van de uitgesloten derde impliceert. Brouwer zou hier het filosofische argument aandragen dat het keuzeaxioma het bestaan van wiskundige entiteiten postuleert die de menselijke geest niet heeft geconstrueerd en in sommige gevallen niet kan construeren.

Hoewel Brouwers positie minder extreem is dan die van Kronecker verwerpt ook Brouwer dus belangrijke delen van de kanonieke verzamelingenleer en dit heeft doorwerkingen in allerlei vakgebieden binnen de wiskunde.

1.3 Hilberts programma

Hilbert's programma ontstond als reactie op de skepsis van Kronecker en in debat met de intuïtionisten Brouwer en Weyl. Hilbert hoopte de fundamenteën van de wiskunde te beschrijven op zo'n manier dat de belangrijke resultaten van de wiskunde beschermd kon worden tegen 'dictators' als Kronecker en Brouwer. Tegelijkertijd hoopte hij dit te doen op uitgaande van zo min mogelijk principes waar Kronecker bezwaar tegen zou kunnen maken. Hiervoor maakte Hilbert een onderscheid tussen twee soorten wiskunde. Het eerste soort wiskunde is de elementaire getaltheorie. Dit is de studie naar de natuurlijke getallen en hun eigenschappen en de manier waarop die opgeteld en vermenigvuldigd kunnen worden. De elementaire getaltheorie was volgens Hilbert inhoudelijk. Ze zou gaan over concrete, buitenlogische objecten, namelijk tekens, die we zuiver, intuïtief en onmiddellijk zouden kunnen overzien in al hun onderdelen. Deze tekens zouden niet te reduceren zijn tot iets anders. Opvallend is hier dat hij meende dat deze tekens herkenbaar zouden zijn onafhankelijk van ruimte en tijd, van de manier waarop het teken tot stand is gebracht of van onbelangrijke verschillen tussen de concrete tekens. Hilbert was in tegenstelling tot Brouwer, optimistisch over de precisie waarmee taal gebruikt kon worden om wiskunde te beschrijven. Hilbert hoopte de elementaire getaltheorie te beschrijven in een formeel systeem dat alle mogelijke uitspraken over de elementaire getaltheorie zou bevatten en zou kunnen bewijzen of ontkrachten. Dit formele systeem zou dit van zichzelf moeten aantonen en zou verder moeten aantonen dat het consistent is. In hoofdstuk 2 zal worden uitgelegd wat een formeel systeem is en hoe het in Hilberts filosofie past. Het tweede soort wiskunde zouden mogelijke uitbreidingen op de elementaire getaltheorie zijn. Deze zijn volgens Hilbert ideëel. Ze mogen onder strikte voorwaarden op instrumentalistische wijze worden ingezet om nuttige wiskunde te bewijzen. De belangrijkste van die voorwaarden is dat bewezen zou moeten worden dat een dergelijke uitbreiding consistent is

met de elementaire getaltheorie. Hoe Hilbert zich dit precies voorstelde zal in paragraaf 3.2 verder worden toegelicht.

Consistentiebewijzen tonen de consistentie van een bepaalde verzameling uitspraken aan door er een interpretatie van te bedenken die aan al die uitspraken voldoet. Neem bijvoorbeeld de logische uitdrukking $1) \forall x \exists y (P(y, x))$. Een mogelijke interpretatie van deze zin bestaat eruit het domein van alle mensen die ooit geleefd hebben te nemen en het relatiesymbool $P(a, b)$ te laten betekenen a is de moeder van b . Dan betekent 1) 'Voor alle mensen die ooit geleefd hebben is er een ander mens dat ooit geleefd heeft die zijn/haar moeder is.' Deze interpretatie bewijst dat 1) een interpretatie heeft en dus dat 1) consistent is. Dit gaat niet altijd goed. Denk bijvoorbeeld aan de volgende zin: $2) \forall x \exists y (P(x, y) \leftrightarrow \neg P(x, x))$. (wellicht bekend aan de lezer als de Russellparadox) We denken misschien dat we gemakkelijk een interpretatie aan die uitdrukking kunnen geven. Denk bijvoorbeeld aan een dorp. De verzameling van alle inwoners van het dorp is het domein en het relatiesymbool $P(a, b)$ wordt geïnterpreteerd als b knipt het haar van a . Dan betekent 2) er is minstens één iemand die van iedereen het haar knipt dan en slechts dan als ze hun eigen haar niet knippen. Zo iemand zou de kapper kunnen zijn. We zouden nu misschien kunnen denken dat we een interpretatie van 2) hebben gegeven en daarmee de consistentie ervan hebben aangetoond. Maar schijn bedriegt. Als we vragen wie het haar van de kapper knipt luidt ons antwoord, hijzelf dan en slechts dan als hij het zelf niet knipt. Dit is een contradictie. Onze interpretatie van 2) is dus contradictoir beschreven. Een kritische lezer zou zich nu echter af kunnen vragen of onze interpretatie van 1) niet, net zoals die van 2) ook tot contradicties leidt. We kunnen proberen op een consistentiebewijs te geven van onze beschrijving in termen van mensen en moeders. Om er zeker van te zijn dat een consistentiebewijs betrouwbaar is zouden we willen dat een interpretatie geconstrueerd wordt volgens de regels van een systeem waarvan al wordt aangenomen dat het consistent is. Maar dit leidt tot een oneindige regressie. We moeten er dus van uitgaan dat één of andere beschrijving consistent is voor we verder kunnen werken. We zouden een bepaalde verzameling zinnen zijn eigen consistentie kunnen laten bewijzen maar dat is een onbetrouwbare methode om consistentie te bewijzen. Uit contradicties volgt immers alles. Dus volgt uit contradicties ook de consistentie van de hetgeen tot de contradictie leidde. Hilbert hoopte dit probleem op te lossen door te stellen dat ons inzicht in de 'tekens' de elementaire getaltheorie een evident consistente interpretatie te geven. Hiermee verdedigde Hilbert dat de symbolen waarmee we de elementaire getaltheorie beschreven zelf fundamentele objecten van wiskundig onderzoek moesten worden. Deze symbolen moesten samen met een aantal logische symbolen in een formeel systeem worden uitgewerkt dat zijn eigen consistentie aan kon tonen. Hiermee zou de elementaire getaltheorie zichzelf kunnen funderen als evident consistent en als zijn eigen interpretatie.

Hilbert meende dat dus het inhoudelijke gedeelte van de wiskunde de elementaire getaltheorie was. Wat nu precies de inhoud was waarover de elementaire getaltheorie ging, is bij Hilbert niet erg duidelijk. Hij probeert de natuurlijke getallen gelijk te stellen aan wat hij 'tekens' noemt. Het is echter duidelijk dat

niet zomaar alle tekens het soort tekens zijn waar Hilbert het over heeft. De relevante tekens kunnen volgens Hilbert herkend worden onafhankelijk van ruimte, tijd, of de productie, vorm of het materiaal waar het teken van is gemaakt. Hij meent verder dat verschillende tekens dezelfde 'vorm' kunnen hebben en dan hetzelfde teken genoemd mogen worden. Deze tekens hebben volgens Hilbert ook geen betekenis. Hilbert geeft enige toelichting van het soort tekens waar hij het over heeft. Hij noemt 1 een teken en alles wat van de vorm $1+1+\dots+1+1$ is ook. Dus 1 is een teken dat we normaal gesproken één noemen en $1+1+1$ is een teken dat we normaal gesproken 3 noemen.¹¹ Deze opvatting over tekens roept allerlei vragen op. Zijn het fysieke objecten, gedachteconstructen, platoonse objecten of nog weer iets anders? Het is de vraag in hoeverre we betekenisloze dingen, waarvan de relevante eigenschappen herkend kunnen worden onafhankelijk van de bovengenoemde zaken, tekens genoemd moeten worden.

Verder is het vreemd dat deze 'tekens' enerzijds de objecten zijn waar de elementaire getaltheorie over gaat, maar dat anderzijds de relevante vorm van de tekens door allerlei verschillende tekens geïncantieerd kan worden. Als dit zo is ligt het voor de hand uit te zoeken wat die vorm is en dat als de natuurlijke interpretatie van de elementaire getaltheorie te zien. Het is evenmin duidelijk hoe dergelijke 'tekens' kunnen verklaren dat wiskunde zo goed toepasbaar is op de rest van de wereld.

Het voordeel van Hilberts theorie van tekens was dat de consistentie van de wiskunde, in elk geval de getaltheorie, volledig af zou kunnen hangen van de consistentie van de tekens, onafhankelijk van hun interpretatie. Een formeel systeem kan opgebouwd worden uit tekens die hopelijk precies de natuurlijke getallen instantiëren. Het was dan wel nodig dat zo'n formeel systeem zijn eigen consistentie kon bewijzen op een zuiver syntactische manier. Dit wil zeggen dat aangetoond moest worden dat ons inzicht in de tekens niet tot zinnen van de vorm $\phi \rightarrow \neg \phi$ zou leiden.

Hilbert wordt vaak als 'formalist' omschreven. Brouwer noemt hem een formalist en veel latere commentatoren volgen hem daarin. Er moet echter voorzichtig met deze term worden omgesprongen. Hilbert geloofde inderdaad dat de wiskunde in formele systemen accuraat en volledig kon worden beschreven. Hierin verschilt hij van Brouwer en in deze zin kan hij een formalist genoemd worden. Het woord 'formalist' heeft in de filosofie van de wiskunde echter ook een sterkere betekenis. Een formalist in deze sterke zin meent dat wiskunde niets is dan een formeel spel van definities en regels die de wiskundige zelf heeft gedefinieerd. Die positie is verdedigd door de denkers Heine en Thomae maar niet door Hilbert. Hoewel Hilbert dit in zekere zin wel denkt over de wiskunde die niet gereduceerd kan worden tot de elementaire getaltheorie geldt voor de elementaire getaltheorie dat die wel degelijk ergens over gaat; namelijk de 'tekens' in de zin die we zojuist hebben besproken. In deze tekens hebben we a priori inzicht, niet omdat we ze zelf hebben verzonnen maar omdat ze volgens Hilbert aanschouwelijk zijn. Hierin wijkt Hilbert af van de formalist in deze

¹¹Hilbert, 1922

sterkere zin.¹²

1.4 Brouwers kritiek op Hilbert

Brouwer was er al vroeg van overtuigd dat Hilberts project niet succesvol zou zijn. Zoals we hebben besproken meende Brouwer dat de taal die wiskundigen gebruiken slechts een onvolmaakte afspiegeling is van wat zij mentaal construeren. De oneindige regressie van interpretatie van een formeel systeem en constructie van interpretatie in een ander formeel systeem wil Brouwer dan ook niet oplossen door een zelfreferentieel formeel systeem te aanschouwen over de elementaire getaltheorie. Brouwer meent dat mensen simpelweg een 'oerintuïtie' hebben van de tijd. Hiermee kunnen wij het continuüm aanschouwen. Het continuüm kunnen we ons voorstellen als een lijn of als de reële getallen. Hieruit kunnen we dan weer verdere wiskunde construeren. Een taal, formeel of natuurlijk, die we gebruiken om dit te beschrijven is volgens Brouwer mosterd na de maaltijd. De wiskundige constructie van verdere wiskundige concepten met het continuüm als elementair bouwblok is waar volgens Brouwer wiskunde uit bestaat. Dit wordt enkel zeer imperfect beschreven in talen die we gebruiken om onze constructies en constructiemethoden te communiceren.

Consistentie bij Hilbert was uiteindelijk een syntactische eigenschap, een eigenschap van de tekens van een zelfreferentieel formeel systeem van de elementaire getaltheorie. Een contradictie was simpelweg een zin in zo'n systeem die afgeleid kon worden uit een inconsistent systeem. Volgens Brouwer was het idee dat consistentie een syntactische eigenschap was onwaar. Hij meende dat consistentie er enkel in bestond dat een bepaalde uitspraak of een bepaald formeel systeem een geconstrueerde interpretatie had. Brouwer voert in zijn dissertatie een hypothetische logicus op die het belang van logische redeneringen verdedigt die hij beantwoordt met:

De woorden van uw wiskundig betoog zijn slechts de begeleiding van een woordloos wiskundig bouwen, en waar gij de strijdigheid uitspreekt, merk ik eenvoudig, dat het bouwen niet verder *gaat*, dat er geen plaats te vinden is in het gegeven grondgebouw voor het opgegeven gebouw. En waar ik dat merk, denk ik aan geen principium contradictionis.¹³

Het is hier duidelijk dat Brouwer niet is geïnteresseerd in zinnen die zichzelf tegenspreken. Dit is hoogstens een manier om naar anderen te communiceren wat de wiskundige zelf al weet, dat een bepaalde constructie onmogelijk is. De fundering en consistentie van de wiskunde moet gezocht worden, niet in de tekens zelf, maar in de interpretatie van onze taal. Consistentie was volgens Brouwer dus een semantische eigenschap. Dit onderscheid tussen de filosofie van Hilbert en Brouwer, de vraag of consistentie een syntactische of semantische eigenschap is, is van het grootste belang gebleken. We zullen namelijk zien dat Gödels tweede onvolledigheidsstelling Brouwer op precies dit punt gelijk geeft.

¹²Ewald meent om deze reden dat het woord formalist helemaal niet op Hilbert van toepassing is. (Ewald 1996, p1106-1107)

¹³Brouwer 1907, p127

2 Formeel geaxiomatiseerde systemen van de rekenkunde

We hebben in het vorige hoofdstuk al enkele keren verwezen naar formele systemen. In dit hoofdstuk zullen de belangrijkste eigenschappen van een formeel geaxiomatiseerd systeem van de wiskunde uiteengezet worden. Deze eigenschappen zijn de formele taal waarin het systeem is opgeschreven, de symbolen die tot die taal behoren, de bedoelde interpretatie van die taal, de axioma's en de gehanteerde bewijsmethoden. Als voorbeeld van een formeel systeem zal Peano Arithmetic, vanaf nu af aan 'PA' genoemd, gebruikt worden. PA is een formeel systeem waarmee Hilbert de elementaire getaltheorie hoopte te beschrijven. Hiermee wordt de concrete uitwerking van Hilberts project duidelijker en worden de concepten uitgelegd die nodig zijn om preciezer uit te leggen wat Gödels onvolledigheidsstellingen zeggen. De onvolledigheidsstellingen die in hoofdstuk 3 uiteen gezet zullen worden zijn de voornaamste reden dat Hilberts programma in de oorspronkelijke vorm is verlaten. Deze stellingen kunnen niet goed begrepen worden zonder dat het concept van een formeel systeem duidelijk is. Dit is omdat formele systemen precies het soort dingen zijn waar onvolledigheid op van toepassing is.

2.1 Preliminare concepten

2.1.1 Algoritmes

Voordat we kunnen uitleggen wat een formeel systeem is moeten eerst een aantal andere concepten worden uitgelegd. De belangrijkste concepten die we zullen bespreken zijn die van effectieve beslisbaarheid en effectieve berekenbaarheid. Hiervoor is het concept van een algoritme belangrijk. Een algoritme is een reeks exact gedefinieerde stappen die uitgevoerd moeten worden in een exact gedefinieerde volgorde. Er mag bij geen enkele stap twijfel mogelijk zijn over welke stap uitgevoerd moet worden of hoe dit gedaan moet worden. Dit alles moet duidelijk zijn op basis van hoe die stappen gedefinieerd zijn. Er mag verder door het algoritme geen enkele aanspraak worden gemaakt op bronnen van buitenaf zoals verbeelding, intuïtie, empirie, willekeurige antwoorden (zoals bijvoorbeeld een antwoord verkregen op basis van een dobbelsteen), of enige andere onafhankelijke bron van informatie. Een algoritme moet dus deterministisch en doorzichtig zijn. Een algoritme krijgt een input, bijvoorbeeld het getal 3, waarop het zijn stappen uit moet voeren. Een algoritme kan al deze stappen afmaken en stoppen waarna het een output oplevert, bijvoorbeeld het getal 6. Een algoritme kan in principe voor eeuwig doorgaan met stappen uitvoeren. Dergelijke algoritmes zijn voor onze doeleinden niet interessant. Als er in het vervolg naar algoritmes verwezen wordt zal hiermee bedoeld worden: algoritmes die altijd na een eindig aantal stappen stoppen en dan een output opleveren. Het aantal stappen mag wel onvoorstelbaar en onpraktisch groot zijn maar dus niet oneindig groot. Een algoritme kan onder meer gebruikt worden om dingen over getallen, zinnen, verzamelingen en andere voor ons relevante objecten te

berekenen.¹⁴

2.1.2 Functies

Een functie $f : D \rightarrow C$ is een relatie tussen twee verzamelingen D en C . We noemen D het domein en C het codomein. Een functie kent aan iedere element in D precies één element in C toe. Het bekendste soort functies zijn functies $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zoals bijvoorbeeld de functie h met $h(x) = x^2$. ($\mathbb{R}$ is de verzameling van alle reële getallen. $-\pi, -2, 0, 5/4, 250, 1024, 4$, etc) Deze functie kent aan ieder reëel getal x het reële getal toe dat het kwadraat is van x . Functies kunnen effectief berekenbaar zijn en eigenschappen en verzamelingen kunnen effectief beslisbaar zijn. Een functie F die een domein D heeft is effectief berekenbaar dan en slechts dan als er een algoritme bestaat dat voor ieder lid x van D de correcte waarde van de functie voor x geeft. Zo kan er bijvoorbeeld een functie $i : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 0\}$ bestaan die voor ieder natuurlijk getal aangeeft of het even is. Een dergelijke functie is effectief berekenbaar dan en slechts dan als er een algoritme bestaat dat voor ieder even getal de output 1 geeft en voor ieder oneven getal de output 0. Het is belangrijk een functie te onderscheiden van een algoritme. Alle twee kunnen beschreven worden als iets dat een verband aanbrengt tussen een input en een output. Een functie bestaat er echter alleen uit dat een specifieke input aan een specifieke output wordt verbonden. Een algoritme is een procedure om dit verband te achterhalen. Zo kunnen er verschillende algoritmes bestaan die op een andere manier dezelfde input aan dezelfde output te verbinden. Een functie bestaat echter enkel uit het verband tussen de 'input' en de 'output' of beter gezegd, de leden van het domein en van het codomein. Als dus door twee functies met hetzelfde domein en codomein voor ieder lid van het domein, hetzelfde lid het codomein gegeven wordt, zijn die twee functies altijd dezelfde functie.

2.1.3 Effectieve beslisbaarheid

Een eigenschap of relatie is effectief beslisbaar dan en slechts dan als voor ieder relevant ding of aantal dingen door een algoritme bepaald kan worden of de eigenschap of relatie hierop van toepassing is. Net als bij de functie f hierboven is de eigenschap 'even zijn' effectief beslisbaar dan en slechts dan als er een algoritme bestaat dat voor ieder even getal de output 'ja' geeft en voor iedere andere input de output 'nee'.

Een verzameling is effectief beslisbaar als voor ieder relevant ding door een algoritme bepaald kan worden of het een lid is van de verzameling of niet. Het voorbeeld van hierboven kan mutatis mutandis overgenomen worden.

Let wel dat een algoritme er wellicht niet in een eindig aantal stappen in slaagt om ieder lid van een verzameling te produceren. De verzameling heeft wellicht een oneindig aantal leden. Dit betekent niet dat de verzameling niet effectief beslisbaar is. Wat belangrijk is voor effectieve beslisbaarheid is dat voor ieder individueel relevant ding in een eindig aantal stappen beslist kan worden

¹⁴Smith 2013, paragraaf 3.1

of het een lid is van de verzameling of niet. Hetzelfde geldt mutatis mutandis voor functies en eigenschappen. De bovengenoemde functie f heeft een oneindig aantal leden in het domein en er zijn oneindig veel getallen die gecontroleerd zouden kunnen worden op de eigenschap even. Hoewel dat niet in een eindig aantal stappen kan, is een dergelijke functie alsnog effectief berekenbaar en een dergelijke eigenschap alsnog effectief beslisbaar als voor ieder lid van het domein maar in een eindig aantal stappen de bijbehorende waarde in het codomein, hetzij het antwoord 'ja' of 'nee' kan worden gevonden.¹⁵

2.2 Een formele taal

Een formeel systeem is geschreven in een formele taal. We zullen dus eerst uitleggen wat een formele taal is voor we eraan toe kunnen komen uit te leggen wat een formeel systeem is. Een formele taal bestaat uit een aantal logische symbolen, een aantal niet-logische symbolen en uit een aantal regels voor wat als een zin in de taal geldt. Een formele taal kan ook een bedoelde interpretatie hebben. Een formele taal bestaat zelf echter enkel uit symbolen waarvan de betekenis afhangt van de interpretatie. Als voorbeeld hiervan zal de taal $\mathcal{L}_A$, de taal van $\mathcal{P}\mathcal{A}$, gebruikt worden. Het moet voor een formele taal effectief beslisbaar zijn of een bepaalde zin, of symbool deel is van die taal en verder moet het effectief beslisbaar zijn met welk symbool we van doen hebben.

Ten eerste de logische symbolen waaruit de taal bestaat. Een formele taal heeft veelal kwantoren, voegtekens bekend van de propositielogica, variabelen, haakjes en een identiteitsteken. $\mathcal{L}_A$ heeft bijvoorbeeld beide kwantoren $\forall$ en $\exists$, de logische symbolen $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\vee$ en $\wedge$, een aftelbaar oneindige hoeveelheid variabelen x , haakjes (en) en $=$. Al deze symbolen worden gebruikt in de betekenis die we kennen van eenvoudige wiskunde en logica.

Ten tweede de niet-logische symbolen, dit zijn de elementaire constanten, functiesymbolen en relatiesymbolen die een taal gebruikt. In $\mathcal{L}_A$ is 0 een constante, is S een functiesymbool waarin één waarde wordt ingevoerd en zijn $+$ en $\times$ functiesymbolen waar twee waarden moeten worden ingevoerd. De bedoelde interpretatie van 0 , $+$ en $\times$ ligt voor de hand. Met S wordt de successorfunctie bedoeld. Dat wil zeggen de functie die voor ieder natuurlijk getal bij ditzelfde getal 1 optelt. Bijvoorbeeld: 0 betekent nul, $S0$ betekent 1 , $SS0$ betekent 2 , $SSS0$ betekent 3 , etc. Of anders gezegd: Sy betekent y plus 1 bij de bedoelde interpretatie.

Ten derde de regels die bepalen of iets een zin van een formele taal is. Hier kunnen allerlei regels voor gebruikt worden zolang het maar effectief beslisbaar is of iets een zin is of niet. Dit is belangrijk omdat, net zoals in het Nederlands, zinnen en niet symbolen of woorden een waarheidswaarde hebben. Eerst is het belangrijk de notie van een term te begrijpen. Een zin is namelijk opgebouwd uit termen. Een term kan in $\mathcal{L}_A$ alleen één van de volgende dingen zijn:

- 0 of een variabele.

¹⁵Smith 2013, hoofdstuk 3

- Een reeks symbolen $S\beta$, $\beta \times \delta$ of $\beta + \delta$ waarbij β en δ andere termen zijn.

In La is een uitdrukking α een zin dan en slechts dan als aan een van de volgende twee voorwaarden is voldaan:

- α is opgebouwd uit twee termen met een $=$ ertussenin. Dan is α een atomaire zin.
- α is opgebouwd uit atomaire zinnen met voegtekens of kwantoren ertussen op de manier die gebruikelijk is voor zinnen in propositie- en predicaatlogica.

Voorbeelden van zinnen in La zijn:

- $SS0 = S0 + S0$
- $\forall a \forall b (a \times b = b \times a)$
- $\forall a (\exists b (a = ss0 \times b) \rightarrow \neg \exists c (a = (ss0 \times c) + s0))$

Deze zinnen betekenen respectievelijk '1+1=2', 'Voor alle a en b geldt: $a \times b = b \times a$ ' en 'als een getal even is, is het niet oneven'. Deze zinnen zijn waar bij de bedoelde interpretatie van La maar het is natuurlijk ook mogelijk om onware zinnen in La op te schrijven zoals $S0 + S0 = SSS0$ (1+1=3).

Het is behulpzaam om de formele taal La te contrasteren met een natuurlijke taal zoals het Nederlands. In het Nederlands is het vrijwel nooit beslisbaar of iets een woord of een zin is van het Nederlands. Er bestaat geen eenvoudig lijstje van Nederlandse woorden of een snelle en onfeilbare manier om te controleren of iets een Nederlands woord is in geval van twijfel. Dergelijke twijfel kan in het geval van La eenvoudig opgelost worden door te kijken naar het hierboven genoemde lijstje met voorwaarden voor uitdrukkingen in La. Verder bestaat er een grote tussenklasse van slecht Nederlands. Neem de zin 'hun is sneller als mij'. Er staan duidelijke grammaticale fouten in deze zin maar we beschouwen het desondanks als een Nederlandse zin met een waarheidswaarde. We spreken hier van slecht Nederlands. In La bestaat zoiets niet. Iets is of een zin van La, of het is geen zin van La. Hier zit niets tussenin en iets kan ook niet zowel een zin als geen zin van La zijn. Een zin in het Nederlands kan ambigu zijn. Neem 'Ik zie een kiwi'. Hiermee kan bedoeld worden dat de spreker een bepaalde vrucht ziet, maar ook dat hij/zij een bepaald vogeltje ziet. In La komen dergelijke ambiguïteiten niet voor. Men kan zelfs een gedicht in het Nederlands schrijven dat ambigu is, zich niet aan de Nederlandse grammatica houdt en woorden introduceert die voor het schrijven van het gedicht niet tot de Nederlandse taal gerekend werden. Ondanks dit alles kan het gedicht toch tot een uiting van de Nederlandse taal worden gerekend. In La kan dit alles niet. Natuurlijke talen zijn in de meeste gevallen eenvoudiger te lezen dan formele talen en ze zijn duidelijk geschikt voor poëzie, literatuur, boodschappenlijstjes en communicatie over vrijwel alle niet-logische en niet-wiskundige onderwerpen. Formele talen zijn preciezer en minder ambigu dan natuurlijke talen en bieden daarom voordelen bij het analyseren van complexe wiskundige en logische bewijzen. Verder

kunnen bewijzen over bepaalde formele systemen ons wiskundige kennis opleveren. Wiskundigen schrijven hun artikelen echter niet in een formele taal maar altijd in een natuurlijke taal. Weliswaar staan in wiskundige artikelen symbolen en tekens die ook in formele talen voorkomen maar dit kan worden gezien als een uitbreiding op onze natuurlijke taal. Een andere toepassing van formele talen is in het programmeren van computers. Dit gebeurt volledig in formele talen.¹⁶

2.3 Geaxiomatiseerde systemen

In een formele taal kan een formeel geaxiomatiseerde theorie uiteengezet worden. Zo'n theorie bestaat uit een formele taal met een bedoelde interpretatie, niet-logische axioma's en een bewijsmethode. Het systeem PA wordt in La geschreven met de bedoelde interpretatie van La.

Niet-logische axioma's zijn zinnen in de gebruikte formele taal die voor onproblematisch waar worden aangenomen. Een formeel systeem S kan zoveel axioma's hebben als de bedenker ervan wil zolang het maar effectief beslisbaar is of een bepaalde zin een axioma is van S. Een systeem kan zelfs oneindig veel axioma's hebben. Zo kan er een axiomaschema gedefiniëerd worden. Dit is een schema dat aangeeft dat iedere zin in een gegeven formele taal van een bepaalde vorm een axioma is. PA heeft zes unieke axioma's en één axiomaschema waar oneindig veel zinnen van La aan voldoen.

Axioma 1: $\forall x(\neg(0 = Sx))$

Axioma 2: $\forall x\forall y(Sx = Sy \rightarrow x = y)$

Axioma 3: $\forall x(x + 0 = x)$

Axioma 4: $\forall x\forall y(x + Sy = S(x + y))$

Axioma 5: $\forall y(y \times 0 = 0)$

Axioma 6: $\forall y\forall z(y \times Sz = (y \times z) + y)$

Axiomaschema: $(\phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \rightarrow \phi(Sx))) \rightarrow \forall x(\phi(x))$

Waarbij $\phi(x)$ een willekeurige zin in La is waarin de variabele x vrij is. Dergelijke zinnen kunnen gebruikt worden om eigenschappen van getallen in La-zinnen te schrijven.

Van de eerste zes axioma's is de betekenis en de waarheid hopelijk intuïtief duidelijk. Bedenk hierbij dat de bedoelde interpretatie van PA $\{\mathbb{N}; 0; +; \times\}$ is. Het axiomaschema verdient enige aandacht. Dit schema voegt axioma's toe om volledige inductie in PA uit te drukken. Volledige inductie is een wiskundige bewijstechniek. Bij volledige inductie wordt eerst aangetoond dat het getal 0 een bepaalde eigenschap ϕ heeft. Dit noemen we de basisstap. We schrijven dit ook wel als $\phi(0)$. Vervolgens wordt aangetoond dat als een getal x diezelfde

¹⁶Smith 2013, paragraaf 4.2

eigenschap heeft dat $x+1$ die eigenschap ook heeft. Dit noemen we de inductiestap en die schrijven we als $\phi(x) \rightarrow \phi(Sx)$. Met behulp van deze twee premissen kan via modus ponens worden aangetoond worden dat $\phi(1)$ ook geldt. Immers 1 is S0. Met behulp van $\phi(1)$ en de inductiestap kan via modus ponens $\phi(2)$ worden aangetoond en zo kunnen we doorgaan tot we ieder natuurlijk getal dat we willen gehad hebben. Wiskundigen concluderen daarom uit de basisstap en de inductiestap dat voor alle natuurlijke getallen x geldt $\phi(x)$.

Een bewijsmethode is een methode waarmee vanuit een aantal stellingen een andere stelling bewezen kan worden. Bij zo'n bewijsmethode is het belangrijk dat het effectief beslisbaar is of iets een geldige afleiding is of niet. Gecombineerd met de eis dat het effectief beslisbaar moet zijn of iets een axioma is van een gegeven formeel systeem moet het bij een formeel systeem dus ook effectief beslisbaar zijn of een gegeven reeks zinnen achter elkaar in de formele taal van het systeem mag gelden als een bewijs binnen dat systeem. De bewijsmethode van PA is een willekeurig gekozen afleidingssysteem voor klassieke eerste-orde predicaatlogica met een identiteitsrelatie. Er zijn verscheidene van zulke soorten systemen waarvan bewezen kan worden dat ze equivalent zijn. Daarbij zullen afleidingen over klassieke eerste-orde predicaatlogica en het identiteitsteken al bekend zijn. Officieel zullen we Smith¹⁷ volgen en kiezen voor een Hilbertstijl axiomatische bewijsmethode. Dit is een bewijsmethode waarbij met behulp van modus ponens en enkele logische axiomas zinnen één voor één uit elkaar worden afgeleid. Verder nemen we een bewijssysteem dat de propositie en predicaatlogica omvat en ook het identiteitssymbool. Zulke bewijssystemen zijn uitermate onpraktisch. Voor het argument is het echter belangrijk om een bewijssysteem te kiezen. We zullen hier later op terugkomen. Er zal nu een voorbeeld gegeven worden van een concreet bewijs in PA. Hierin en in de rest van deze tekst zullen we echter alle stappen overslaan die enkel berusten op de logische methode van ons afleidingssysteem. Deze stappen zijn zo triviaal dat dit geen verwarring zou moeten opleveren. Als voorbeeld van hoe PA werkt is hier een bewijs dat $3+2=5$ in PA.

1. $SSS0+0=SSS0$ (uit axioma 3)
2. $SSS0+S0=SSSS0$ (uit 1 en axioma 4)
3. $SSS0+SS0=SSSSS0$ (uit 2 en axioma 4)

18

2.4 Waarom een formeel systeem?

Het mag duidelijk zijn dat als we op dezelfde manier als in het voorgaande voorbeeld hadden willen bewijzen dat $96+112=208$ we de stap die ons van 1 naar 2 en daarna van 2 naar 3 leidde 112 keer hadden moeten uitvoeren. Verder

¹⁷Smith 2013, paragraaf 4.3 De relevantie van deze keuze wordt ook duidelijk in paragraaf 3.4 in deze scriptie

¹⁸Smith 2013, paragraaf 4.3 en hoofdstuk 13

had in dat bewijs tienduizenden keren het S-teken moeten staan. Een bewijs van de simpelste wiskunde wordt hierdoor al 113 stappen lang en zodanig onprettig leesbaar dat het niet voorstelbaar is dat een wiskundige ermee zou willen werken. En dat is al zo als we een flink aantal strict logische stappen weglaten die het bewijs nog een aantal keer zo lang hadden gemaakt. Zelfs als we manieren vinden om minder stappen te maken moeten we alleen voor het uitschrijven van $96+112=208$ het S-teken al 416 keer gebruiken. Het mag dus duidelijk zijn dat PA voor de meeste wiskundigen geen geschikte manier is om aan wiskunde te doen. De bedoeling van PA was dan ook niet dat wiskundigen er daadwerkelijk mee gingen werken bij het bewijzen van moeilijke stellingen maar dat we er in theorie, als we zouden willen wel iedere rekenkundige stelling uit zouden kunnen afleiden. De hoop was dat van iedere mogelijke zin ϕ in La uit PA bewezen zou kunnen worden dat ofwel ϕ ofwel $\neg\phi$ waar is. Op die manier zou alles wat waar en inhoudelijk is in de rekenkunde beschreven kunnen worden in een formeel systeem. Omdat formele systemen geen ruimte laten voor enige ambiguïteit zou dit betekenen dat op die manier van iedere wiskundige uitspraak precies duidelijk zou zijn wat het betekende dat hij waar is, dat hij wiskundig van aard is en hoe hij bewezen zou moeten worden.

3 Gödels onvolledigheidsstellingen

Nu we Hilberts programma hebben geïntroduceerd en weten wat een formeel systeem is kunnen we Gödels onvolledigheidsstellingen uitleggen. In paragraaf 3.2 zullen de begrippen volledigheid en consistentie worden uitgelegd en zal worden verteld wat Hilbert met een formeel systeem als PA hoopte te bereiken. In paragraaf 3.3 zullen de onvolledigheidsstellingen worden geformuleerd. In paragraaf 3.4 zal worden geschetst hoe Gödel zelfreferentiële zinnen in PA wist te construeren.

3.1 Nogmaals Hilbert en Brouwer over consistentie

We kunnen nu met behulp van de in hoofdstuk 2 geïntroduceerde begrippen de verschillen tussen Brouwer en Hilbert die we in paragraaf 1.4 hebben besproken nog wat exacter formuleren. Zoals daar gesteld bestaat een belangrijk verschil tussen Hilbert en Brouwer erin dat Hilbert consistentie uiteindelijk als syntactische eigenschap ziet terwijl Brouwer dit als een semantische eigenschap ziet. We zullen consistentie beschouwen als een eigenschap van een formeel systeem. Volgens Hilbert bestaat deze eigenschap erin dat als een zin ϕ uit het formele systeem volgt dat $\neg\phi$ dan niet uit dit systeem volgt. Volgens Brouwer betekent de consistentie van een formeel systeem echter dat dit formele systeem een geconstrueerde interpretatie heeft. Hoewel een interpretatie van een formeel systeem aantoont dat het inderdaad zichzelf niet kan tegenspreken meent Brouwer echter dan het omgekeerde niet geldt. Het mag dan wel zo zijn dat we uit een formeel systeem nog geen tegenspraken hebben afgeleid maar dat hoeft nog niet te betekenen dat het verwijst naar enige geconstrueerde wiskunde.

3.2 Uitbreidingen van PA

Zoals we in paragraaf 1.3 al aangaven onderscheidde Hilbert een inhoudelijk, zeker, gedeelte van de wiskunde van instrumentalistische uitbreidingen hierop. We kunnen nu gaan begrijpen hoe dit vorm moest krijgen. Hiervoor zijn twee concepten belangrijk: volledigheid en consistentie. Een formeel systeem P is volledig als voor elke zin ϕ die in de taal van P kan worden opgeschreven geldt dat $P \vdash \phi$ of $P \vdash \neg\phi$. Met andere woorden, P is volledig als iedere zin in de taal van P door P wordt bewezen of ontkracht. Hilbert hoopte een consistent en volledig formeel systeem van de elementaire getaltheorie te formuleren. Dit systeem moest zijn eigen consistentie kunnen bewijzen. Het systeem dat hiervoor gebruikt moest worden was PA of een ander systeem P wat er sterk op zou lijken. Met behulp van dat systeem kon dan onderzocht worden of een bepaalde uitbreiding $P+$ acceptabel was. Zo'n systeem $P+$ moest daarvoor op zijn minst consistent zijn met PA. Dat wil zeggen dat voor alle zinnen ϕ in $\mathcal{L}_a$ geldt dat als $P+ \vdash \phi$ dan $PA \not\vdash \neg\phi$. Een uitbreiding op zo'n systeem zou extra symbolen en axioma's kunnen toevoegen die misschien niet strikt genomen naar enige inhoud zouden verwijzen maar wel nuttig zouden zijn om mee te rekenen. Als $P+$ consistent zou zijn met PA was direct ook gegarandeerd dat $P+$ niet per

ongeluk onware dingen zou gaan bewijzen over het inhoudelijke gedeelte van de wiskunde.

Stel nu dat PA ook nog volledig is, en $P+ \vdash \phi$ waarbij ϕ een zin in La is. Stel ook dat U consistent is met PA. We kunnen daaruit afleiden dat $PA \vdash \phi$. Immers als PA volledig is geldt voor iedere zin μ in La dat $PA \vdash \mu$ of $PA \vdash \neg\mu$ en als P+ consistent is met PA en $P+ \vdash \phi$ kan niet gelden dat $PA \vdash \neg\phi$ dus moet $PA \vdash \phi$ wel het geval zijn. In dat geval kan een ideële uitbreiding op de wiskunde zelfs gebruikt worden om stellingen te bewijzen over de reële wiskunde.¹⁹

Er bestaan ook inconsistente formele systemen. Hierin zijn contradicties afleidbaar met als gevolg dat iedere zin die binnen dat formele systeem geformuleerd kan worden ook afleidbaar is. Deze systemen zijn dus volledig. Zulke formele systemen zijn voor Hilbert natuurlijk niet interessant. Ze zouden immers ook onwaarheden en contradicties afleiden zoals $0 = S0$ en $S0 = SS0 \wedge \neg(S0 = SS0)$. Dergelijke onwaarheden die gaan over het volgens Hilbert inhoudelijke gedeelte van de wiskunde waren uiteraard onacceptabel.

3.3 De onvolledigheidsstellingen

De onvolledigheidsstellingen toonden aan dat het project van Hilbert niet kon werken. De eerste onvolledigheidsstelling zegt dat een consistent formeel geaxiomiseerd systeem dat een minimaal aantal stellingen over de elementaire getaltheorie kan bewijzen altijd onvolledig moet zijn. Gödel bewijst deze stelling door een manier te bedenken waarop wij een zin kunnen vinden die waar is dan en slechts dan als hij onbewijsbaar is. We zullen zo'n soort zin 'G' noemen. Stel dus we hebben een willekeurig systeem P en $P \vdash G$, dan is G onwaar en dus bewijst P een onware zin. Stel $P \vdash \neg G$ en P is consistent dan is G waar en dus bewijst P ook dan een onware zin.

De tweede onvolledigheidsstelling zegt dat geen enkel consistent formeel geaxiomiseerd systeem dat een minimaal aantal stellingen over de elementaire getaltheorie kan bewijzen zijn eigen consistentie kan bewijzen. Hieruit volgt dat zo'n systeem ook van uitbreidingen op zichzelf de consistentie niet kan bewijzen. Immers als een systeem P van een uitbreiding P+ op P kan bewijzen dat P+ consistent is, volgt daaruit dat P ook consistent is. Het systeem P bewijst immers geen enkele zin die P+ niet bewijst en P+ bewijst geen contradicties dus P ook niet. Gödel bewees de tweede onvolledigheidsstelling door aan te tonen dat de eerste onvolledigheidsstelling bewezen kon worden in de formele systemen waar die over ging. Deze systemen bewezen dus dat als ze consistent waren dat G dan waar was. Maar als deze systemen nu ook nog konden bewijzen dat ze daadwerkelijk consistent zijn, dan zouden we in die systemen, met behulp van modus ponens kunnen afleiden dat G ook daadwerkelijk waar was. Maar de eerste onvolledigheidsstelling zegt nu juist dat dat niet kan. Dus kunnen consistente formele geaxiomiseerde systemen die een minimaal aantal stellingen over de elementaire getaltheorie kunnen bewijzen hun eigen consistentie niet

¹⁹Smith 2013, hoofdstuk 37

bewijzen.²⁰

3.4 Verwijzen naar zinnen in PA

Zoals gezegd bewijst Gödel de eerste onvolledigheidsstelling door een manier te bedenken waarop wij een zin kunnen vinden binnen een formeel systeem die waar is dan en slechts dan als hij onbewijsbaar is binnen dat systeem. De tweede onvolledigheidsstelling hangt af van de stelling dat we de eerste onvolledigheidsstelling kunnen bewijzen binnen een formeel systeem. De formele systemen waar we het over hebben hoeven echter helemaal niet over zinnen of hun bewijsbaarheid te gaan. We hebben bijvoorbeeld PA besproken dat bij een bedoelde interpretatie enkel gaat over de natuurlijke getallen en het optellen en vermenigvuldigen daarvan. Het was Gödels grote vondst om te bedenken hoe systemen over de elementaire getaltheorie ook over hun eigen zinnen kunnen spreken. We hebben niet de ruimte om hier diep op in te gaan dus zullen we enkel een ruw schets geven van hoe hij dit deed.

Gödel begon ermee elke zin in PA te correleren met een bijbehorend natuurlijke getal. Hij maakte, anders gezegd, een injectie van de verzameling van alle zinnen in PA naar de natuurlijke getallen. Hierbij maakte hij gebruik van het feit dat ieder natuurlijk getal groter dan 1 uniek te ontbinden is in priemfactoren. Zo is 8 te schrijven als 2^3 , 34 als 17×2 en 99 als $3^2 \times 11$. Er zijn geen andere combinaties van priemgetallen die je kunt vermenigvuldigen om die getallen te krijgen. Wanneer we een zin in PA zien is die opgebouwd uit een aantal symbolen. Gödel verbond eerst ieder symbool met een getal op de volgende manier. We verbinden $\neg$ met 1, $\wedge$ met 3, $\vee$ met 5, $\rightarrow$ met 7, $\forall$ met 9, $\exists$ met 11, $=$ met 13, $($ met 15, $)$ met 17, 0 met 19, S met 21, $+$ met 23, $\times$ met 25, en iedere nieuwe variabele met het eerstvolgende positieve even getal. (x met 2, y met 4, z met 6 etc.) Bij een gegeven zin in PA kun je met behulp hiervan een zogeheten Gödelgetal geven. Dit getal krijg je door bij het eerste symbool van de zin het kleinste priemgetal (2) te nemen en dat tot de macht te verheffen van het getal dat bij het symbool hoort en het getal dat je dan krijgt te onthouden. Voor het tweede symbool neem je het tweede priemgetal (3) en verhef je dat tot de bijbehorende macht. Dan vermenigvuldig je het getal dat bij het eerste symbool hoort met dat van het tweede symbool en zo ga je door.

Neem bijvoorbeeld de zin ' $S0 = S0 + S0$ '. Deze zin heeft als Gödelgetal $2^{21}3^{21}5^{19}7^{13}11^{21}13^{19}17^{23}19^{21}23^{19}$.

Op deze manier wist Gödel iedere zin in La te koppelen aan een getal. We weten dat een getal niet aan meerdere zinnen gekoppeld kan zijn omdat ieder getal uniek te ontbinden is in priemfactoren. Precies die priemfactoren die ons kunnen vertellen wat de bijbehorende zin is. Vervolgens vond Gödel ook manieren om bewijzen aan getallen te koppelen. Hiervoor is het belangrijk dat we van een specifiek bewijssysteem uitgaan. In een axiomatisch bewijssysteem kan een logische afleiding uit axioma's weergegeven worden door niets dan een aantal zinnen. Deze zinnen hebben allemaal een Gödelgetal. We kunnen een

²⁰Smith 2013, hoofdstuk 1, 22 en 31

rij zinnen weer verbinden aan een uniek zogenaamd supergödelgetal. Dit is het getal dat je krijgt door 2 te verheffen tot de macht van het Gödelgetal van de eerste zin in het bewijs, 3 tot de macht van het Gödelgetal van de tweede zin in het bewijs, etc. Gödel wist een manier te bedenken om zinnen te bedenken met Gödelgetallen erin die waar waren dan en slechts dan als de zinnen die bij de Gödelgetallen hoorden een bepaalde eigenschap hadden. Zo kun je in PA zinnen $\phi(x, y)$ schrijven die afleidbaar zijn uit PA dan en slechts dan als x het supergödelgetal is van een correct bewijs uit de axioma's van PA van de zin waar y het gödelgetal van is. Vervolgens wist Gödel te bewijzen dat het mogelijk moest zijn om zulke zinnen zelfreferentieel te laten zijn. Dat wil zeggen dat ze hun eigen Gödelgetal bevatten. Met behulp hiervan kan er een zin $\phi(z)$ bedacht worden in PA die afleidbaar is uit PA precies als er de zin behorend bij het Gödelgetal z niet afleidbaar is uit PA. Dit wist hij op zo'n manier te doen dat het bestaan van soortgelijke zinnen niet alleen in PA maar in allerlei vergelijkbare systemen aangetoond kon worden. Ook voor andere systemen in andere formele talen dan La geldt dat als een minimaal aantal aannames over de elementaire getaltheorie in deze systemen uitgedrukt kan worden, deze systemen hun eigen consistentie niet kunnen bewijzen.²¹

²¹Smith 2013, hoofdstuk 19

4 Na Hilberts programma

We zullen nu enig afsluitend commentaar geven over de discussie tussen Brouwer en Hilbert. Daarna concluderen we de scriptie met de beschrijving van een paar ontwikkelingen in de filosofie van de wiskunde na Gödels onvolledigheidsstelling.

4.1 Het einde van Hilberts programma

We hebben de filosofie van Hilbert en Brouwer vergeleken. We hebben gezien dat volgens Hilbert consistentie een syntactische eigenschap was van de tekens waar de elementaire getaltheorie over gaat. Hij wilde met nauwgezette procedures bepalen of bepaalde uitspraken wel of niet tot tegenstrijdige uitspraken zouden leiden. We hebben ook gezien dat Brouwer meende dat de consistentie van welke talige uitdrukking dan ook alleen te vinden was door een betekenis ervan te construeren.

Nu is gebleken dat, als we enkele zeer minimale aannames maken over op-telling, vermenigvuldiging en de succesorfunctie, de tekens van de formele taal $\mathcal{L}_A$ niet in staat zijn hun eigen consistentie te bewijzen. Als we de consistentie van de elementaire getaltheorie willen beargumenteren hebben we dus een interpretatie daarvan nodig, los van de tekens die die elementaire getaltheorie beschrijven. Hilbert had dus ongelijk. De consistentie van onze beschrijvingen van de elementaire getaltheorie blijkt geen syntactische eigenschap van die beschrijvingen te zijn. Dan blijft echter enkel nog over, om de consistentie van onze beschrijvingen aan te tonen door te verwijzen naar interpretaties van onze beschrijvingen. Consistentie is dus een semantische eigenschap, zoals Brouwer al dacht. Hoewel Hilberts programma gedurende de periode dat er nog hoop voor was belangrijke bijdragen heeft geleverd aan de bewijsbaarheidstheorie zijn, sinds Gödels onvolledigheidsstellingen zijn gepubliceerd, de filosofische verwachtingen die Hilbert van zijn programma had door vrijwel iedereen verlaten.

4.2 Na Hilberts programma

We zouden nu misschien verwachten dat na het verdwijnen van Hilberts programma het intuïtionisme populairder zou worden. Brouwers intuïtionisme en Hilberts formalisme zijn echter niet de enige filosofische theoriën over de wiskunde. Een andere opvatting is die van de platonisten waartoe Gödel zich rekende. De platonisten geloven net als Brouwer dat de consistentie van een formeel systeem een semantische eigenschap is. Zij wijken echter af van Brouwers idealisme. Platonisten menen dat er wiskundige objecten bestaan en dat die objecten niet geconstrueerd hoeven te worden door de menselijke geest. Sterker nog, zij denken dat deze wiskundige objecten volkomen onafhankelijk zijn van de menselijke geest. Zulke wiskundige objecten, of dit nu getallen zijn of verzamelingen of weer iets anders, bestaan volgens platonisten los van ruimte en tijd en staan dan ook niet causaal met andere dingen in verband. Een formeel systeem is volgens hen net zoals Brouwer ook dacht consistent als het een interpretatie heeft. Zo'n interpretatie hoeft echter niet per sé geconstrueerd te

zijn maar mag simpelweg bestaan. Wij kunnen zo'n interpretatie dan ook niet construeren maar we kunnen hem alleen maar ontdekken. Aangezien alle wiskundige objecten volgens de platonisten al bestaan met al hun eigenschappen erbij, nemen zij de wet van de uitgesloten derde onproblematisch aan voor alle wiskundige objecten, geconstrueerd of niet. Ook is er voor platonisten geen duidelijke reden om het keuze-axioma te verwerpen, aangenomen dat ze het axioma zelf aannemelijk vinden klinken.

Nadat het formalisme van Hilbert verdween verschoof de discussie tussen de intuïtionisten en de formalisten naar die tussen de intuïtionisten en de platonisten. Hoewel filosofisch noch wiskundig onderzoek heeft kunnen aantonen dat de platonisten danwel de intuïtionisten danwel anderen gelijk hebben, blijken de meeste wiskundigen impliciet het intuïtionisme te verwerpen. Dit blijkt uit het feit dat de meesten van hen er geen probleem in zien de wet van de uitgesloten derde, het keuze-axioma en de stellingen die daarvan afhangen te gebruiken in hun bewijzen. We hebben in hoofdstuk 1 besproken dat een belangrijke motivatie voor Hilbert was de wiskunde te beschermen tegen 'dictators' zoals Kronecker en Brouwer die haar wensden in te perken. Hoewel zijn opzet om dit te doen niet is geslaagd blijkt het dat de wiskundige gemeenschap, terecht of onterecht, desondanks niet snel bereid is zich in te laten perken.

Bronnenlijst

1. Smith, P., 2013. *An Introduction to Gödel's Theorems* 2de ed., New York: Cambridge university press.
2. Ewald, W., 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* Vol. II. New York: Oxford University Press.
3. Kant, I., 1781. *Kritiek Van De Zuivere Rede* (2004) Veenbaas, J. (Vert.), Visser, W. (Vert.), Amsterdam: Boom.
4. Brouwer, L.E.J., 1907. *Over de Grondslagen der Wiskunde* (2001). in van Dalen, D. (Red.), *L.E.J. Brouwer en de grondslagen van de wiskunde* (p39-138). Utrecht: Epsilon uitgaven.
5. Hilbert, D., 1920. *Probleme der Mathematischen Logik* Ongepubliceerd college. Fragment in Ewald, W. (Vert. en red.), 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* Vol. II. (p943-946) New York: Oxford University Press.
6. Hilbert, D., 1918. *Axiomatic Thought* toespraak. In Ewald, W. (Vert. en red.), 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* Vol. II. (p1105-1115) New York: Oxford University Press.
7. Hilbert, D., 1922. *The New Grounding of mathematics. First report.* in Ewald, W. (Vert. en red.), 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* Vol. II. (p1115-1134) New York: Oxford University Press.
8. Berkeley, G., 1901 [1707]. *Of Infinites* in Ewald, W. (Red.), 1996. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics* Vol. I. (p16-19) New York: Oxford University Press.
9. Burton, D.M., 1999. *The History of Mathematics, an Introduction*, 7de ed., New York: McGraw-Hill.