

ERASMUS UNIVERSITEIT ROTTERDAM

Erasmus School of Economics

Bachelorscriptie [Econometrie & Operationele Research]

Realized Asymmetric Augmented Real-Time GARCH:
Een gecombineerd model voor returns en realized
measures van volatiliteit met een asymmetrisch proces
voor de volatiliteit van de volatiliteit

Naam student: Peter Dekker

Studentnummer: 510400

Begeleider: dr. R-J. Lange

Tweede begeleider: dr. O. Kleen

Datum definitieve versie: 4 juli 2021

Het geschrevene in deze scriptie is de opvatting van de auteur en niet noodzakelijk die van de begeleider, tweede beoordelaar, Erasmus School of Economics of Erasmus Universiteit Rotterdam.

Abstract

Dit artikel presenteert een nieuw model voor het voorspellen van volatiliteit, waarin zowel realized measures voor volatiliteit zijn opgenomen als een asymmetrisch proces voor de volatiliteit van de volatiliteit. Dit model en verscheidene benchmark modellen uit Smetanina, 2017 en Ding, 2021 worden empirisch getest door het voorspellen van twee indices: S&P 500 en Dow Jones Industrial Average. Het empirisch onderzoek wijst uit dat het toepassen van het realized framework uit Hansen et al., 2012, oftewel een realized measure opnemen in het model, resulteert in betere voorspellen voor real-time modellen. Daarnaast resulteert het opnemen van een asymmetrisch proces voor de volatiliteit van de volatiliteit in het model tot betere voorspellingen voor zowel realized als non-realized real-time modellen.

1 Introductie

Het modelleren van de volatiliteit van aandelen en andere effecten is een groot onderwerp in de financiële literatuur. Er zijn veel verschillende modellen ontwikkeld, welke onder andere getest worden op het voorspellen van de volatiliteit in de toekomst. Een model met een goede voorspellende kracht kan namelijk van nut zijn bij onderwerpen als portfolio optimalisatie, risico management en de waardering van financiële afgeleiden. De bekendste en meest gebruikte modellen voor dit doeleinde zijn de GARCH modellen. De fundamenteën hiervoor zijn gelegd door Engle, 1982 en Bollerslev, 1986, waarna verscheidene varianten hierop zijn ontwikkeld om de voorspellende kracht dan wel de praktische toepasbaarheid te verbeteren.

Deze klassieke GARCH modellen voorspellen de volatiliteit voor tijdstip t op basis van de beschikbare informatie op tijdstip $t-1$. Deze modellen zijn relatief traag in het terugkeren op het niveau van de ongeconditioneerde volatiliteit. Een model dat dit sneller kan, is het real-time GARCH model. Smetanina, 2017 ontwikkelde dit model door het samenvoegen van de GARCH structuur met een stochastic volatility model. Het principe van een stochastic volatility model, waarin informatie op tijdstip t gebruikt wordt voor de voorspelling van een bepaalde variabele op tijdstip t , is opgenomen in het real-time GARCH model. Daarnaast heeft dit model een kurtosis die varieert over tijd. Een uitbreiding hierop is ontwikkeld door Ding, 2021: het augmented real-time GARCH model. Hier wordt naast de volatiliteit ook de volatiliteit van de volatiliteit gemodelleerd. Als gevolg mag de volatiliteit van de volatiliteit conditioneel heteroskedastisch zijn, oftewel variëren over tijd. Deze real-time modellen voorspelden de volatiliteit van indices en aandelen in de empirische studies van Smetanina, 2017 en Ding, 2021 beter dan de klassieke GARCH modellen.

Een andere extensie op de traditionele GARCH modellen is door het includeren van realized measures voor volatiliteit in de GARCH specificatie. Hansen et al., 2012 hebben een model ontwikkeld waarin de conditionele volatiliteit niet alleen van de standaard GARCH specificaties afhangt, maar ook van een vertraagde realized measure. Voorbeelden van maatstaven die als schatter voor de daadwerkelijke volatiliteit gebruikt kunnen worden zijn de realized variance, de bipower variance, de realized kernel en de intra-day range.

Er staan twee onderwerpen centraal in dit onderzoek. Ten eerste het effect van het opnemen van realized measures in real-time GARCH modellen op de kwaliteit van volatiliteit voorspellingen. Daarnaast breid ik het augmented real-time GARCH model van Ding, 2021 uit. Het symmetrische proces voor de volatiliteit van de volatiliteit, wat in het augmented real-time GARCH model is opgenomen, vervang ik voor een asymmetrisch proces. De reden hiervoor is dat negatieve schokken een sterker effect hebben op de volatiliteit dan positieve schokken. Dit effect wordt veel gemodelleerd in het model voor de volatiliteit en de werking ervan met betrekking tot het voorspellen van de volatiliteit is reeds aangetoond. Nu bekijk ik of die asymmetrie ook in de volatiliteit van de volatiliteit aanwezig is en of het modelleren hiervan bijdraagt aan de kwaliteit van volatiliteit voorspellingen. Hiermee ontstaat een nieuw model. Dit model noem ik het asymmetric augmented real-time GARCH model.

Voor het schatten en vergelijken van de modellen gebruik ik twee datasets. Het betreft indices van aandelen, namelijk de S&P 500 en de Dow Jones Industrial Average (DJIA). Ik gebruik de data van 31 juli 2008 tot en met 31 december 2020. Dit komt overeen met de post-crisis periode in het onderzoek van Smetanina, 2017. Deze periode heeft gemiddeld genomen een hogere volatiliteit dan de periode voor 2008. De dataset in dit onderzoek verlengt de post-crisis data uit Smetanina, 2017 met 3 jaar en bevat dus een groot gedeelte van de Covid-19 crisis.

Ik evalueer de voorspellingen van de realized en non-realized versies van negen GARCH modellen. Twee daarvan zijn traditionele GARCH modellen: GARCH(1,1) (Bollerslev, 1986) en GJR-GARCH(1,1) (Glosten et al., 1993). Het GJR-GARCH(1,1) model bevat een leverage effect, terwijl het klassieke GARCH(1,1) model symmetrisch is. De andere modellen zijn real-time GARCH modellen. Ten eerste het RT-GARCH(1,1) model van Smetanina, 2017. Daarnaast drie varianten van het augmented real-time GARCH model van Ding, 2021: ART-GARCH(1,1,1), ART-GJR-GARCH-L(1,1,1) en ART-GJR-GARCH-LF(1,1,1). De laatst genoemden bevatten respectievelijk alleen leverage en zowel leverage als feedback. De laatste drie modellen zijn dezelfde versies van mijn asymmetric augmented real-time GARCH model: AART-GARCH(1,1,1), AART-GJR-GARCH-L(1,1,1) en AART-GJR-GARCH-LF(1,1,1).

De parameters worden geschat door middel van quasi-maximum likelihood (QML). Hiervoor zal 2/3 van de dataset gebruikt worden. Het resterende deel wordt gebruikt voor het evalueren van de out-of-sample voorspellingen. De evaluatie van de modellen wordt in drie stappen uitgevoerd. Als eerste worden de prestaties van de realized modellen vergeleken met die van de non-realized specificatie. Vervolgens worden de drie AART-GARCH varianten vergeleken met de corresponderende ART-GARCH versie. Dit om te concluderen of het opnemen van een asymmetrisch model voor de volatiliteit van de volatiliteit in de GARCH vergelijking een toevoegende waarde heeft ten opzichte van een symmetrisch model hiervoor. Als laatste wordt onderzocht of er een superieur model valt aan te wijzen, welke de beste voorspellingen genereert. De kwaliteit van de voorspellingen wordt geëvalueerd aan de hand van een SPA toets, zoals deze is beschreven in Hansen en Lunde, 2005.

De belangrijkste resultaten uit mijn onderzoek zijn als volgt. Ten eerste leidt het opnemen van realized

measures in real-time GARCH modellen tot betere volatiliteit voorspellingen. Het effect hiervan is het sterkst in periodes met hoge volatiliteit, zoals crises. Daarnaast heeft het includeren van een asymmetrisch model voor de volatiliteit van de volatiliteit een positief effect op de kwaliteit van de voorspellingen voor zowel non-realized als realized modellen. In periodes zonder extreem hoge volatiliteit lijkt het asymmetrische proces voor de volatiliteit van de volatiliteit het modelleren van een leverage effect in het model voor de volatiliteit te kunnen vervangen. Dit geldt voor non-realized modellen. In periode van crisis, Covid-19 in dit onderzoek, is het leverage effect niet te vervangen door een asymmetrisch model voor de volatiliteit van de volatiliteit.

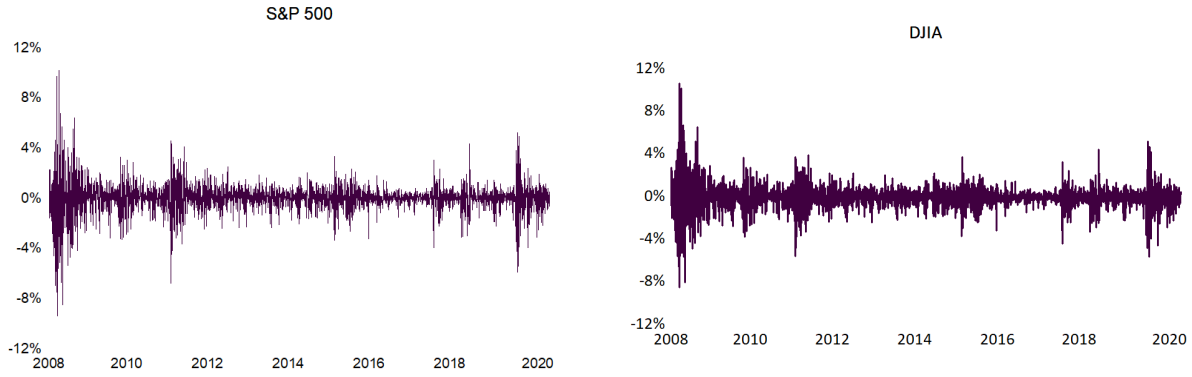
Dit onderzoek draagt bij aan de ontwikkeling van het modelleren van de volatiliteit op de aandelenmarkt. Het idee van Hansen et al., 2012 wordt toegepast en de werking ervan wordt onderzocht op een andere groep modellen, namelijk de real-time GARCH modellen. Deze zijn zeer recent nog doorontwikkeld door Ding, 2021, waardoor de combinatie van zijn modellen met het concept van realized measures een nieuwe contributie is in het modelleren van volatiliteit. Daarnaast is het modelleren van een GARCH specificatie met een asymmetrisch model voor de volatiliteit van de volatiliteit een nieuw concept.

Het artikel is als volgt gestructureerd. Sectie 2 geeft inzicht in de data van dit onderzoek. Sectie 3 is de methodologie. Zowel de model specificatie zelf als enkele statistische eigenschappen van de modellen worden daarin behandeld. Sectie 4 presenteert de resultaten, waarin de voorspellingen van de modellen worden geëvalueerd. Sectie 5 geeft de conclusie. De Appendix bevat enkele aanvullende parameter schattingen en QQ plots.

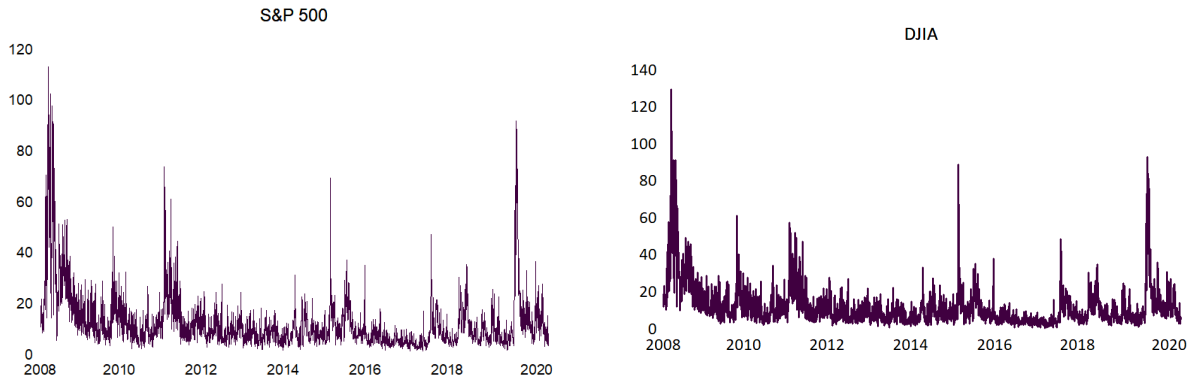
2 Data

De dataset loopt van 31 juli 2008 tot 31 december 2020. Het betreft de open-to-close returns van de S&P 500 en de Dow Jones Industrial Average (DJIA). Deze data is afkomstig uit de realized library van het Oxford-Man Institute of Quantitative Finance.¹ Als schatter voor de daadwerkelijke volatiliteit en als realized measure in de realized GARCH modellen gebruik ik de realized kernel. Deze schatter is robuuster dan de realized variance, welke gevoeliger is voor micro-economische schokken. Hansen en Huang (2016) testten verscheidene realised measures als maatstaven voor de conditionele variantie. De realized kernel bleek de meest accurate schatter te zijn. De 'Realized Kernel Volatility (Non-Flat Parzen)' is ook gedownload uit de realized library van Oxford. Deze Parzen kernel functie is afkomstig uit Barndorff-Nielsen et al., 2009.

¹<https://realized.oxford-man.ox.ac.uk/>



Figuur 1: Open-to-close returns van de indices, 2008-2020



Figuur 2: Realized Kernel, 2008-2020

Figuur 1 en 2 geven een indruk van de volatiliteit gedurende de periode van augustus 2008 tot en met december 2020. Deze figuren ondersteunen de keuze voor het verlengen van de post-crisis dataset uit Smetanina, 2017. De volatiliteit lijkt van 2018 tot 2020 en na de Covid-19 piek op een vergelijkbaar niveau te liggen als het gemiddelde niveau na de kredietcrisis. Daarnaast piekt de volatiliteit aanzienlijk gedurende begin 2020 vanwege het ontstaan van de Covid-19 crisis, maar deze piek is lager dan de piek in 2008 en vergelijkbaar met de piek in 2015. Het lijkt dus valide te zijn om de post-crisis periode van Smetanina, 2017 over te nemen en te verlengen.

3 Methodologie

3.1 Model specificatie

Voor de specificatie van de modellen volg ik de notatie uit Ding, 2021. Het model voor de returns is

$$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (1)$$

waar ε_t een i.i.d. kansvariabele is, welke $\mathcal{N}(0,1)$ verdeeld is. De GARCH vergelijking is

$$\sigma_t^2 = \alpha + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma r_{t-1}^2 + \phi r_{t-1}^2 \mathbb{1}_{t-1} + (\psi_1 + (\psi_{21} + \psi_{22} \mathbb{1}_{t-1}) \sigma_{t-1}^2) \varepsilon_t^2 + \eta \varepsilon_t^2 \mathbb{1}_t, \quad (2)$$

waar $\mathbb{1}_t = 1$ voor een negatieve return op tijdstip t en 0 elders. Als gevolg representeert ϕ alleen het effect van de negatieve returns op de volatiliteit in de volgende periode, terwijl γ het effect van alle returns bevat. De ≥ 0 restrictie wordt aan alle parameters uit vergelijking (2) opgelegd. Het model dat in vergelijking (1) en (2) is weergegeven is het AART-GJR-GARCH-LF(1,1,1) model. Dit is het uitgebreidste model. Het is namelijk een real-time model met zowel een leverage als een feedback effect en een asymmetrisch model voor de volatiliteit van de volatiliteit. De andere modellen worden verkregen door het opleggen van parameter restricties aan vergelijking (2). Het gelijkstellen van ϕ aan 0 transformeert vergelijking (2) tot de specificatie van het AART-GJR-GARCH-L(1,1,1) model. Een model met leverage, maar zonder feedback. Door deze restrictie te combineren met $\eta = 0$ wordt het AART-GARCH(1,1,1) model verkregen, welke leverage noch feedback bevat. Door ψ_{22} gelijk te stellen aan 0 wordt het ART-GJR-GARCH-LF(1,1,1) model uit Ding, 2021 verkregen. Dit is een model waarin de volatiliteit van de volatiliteit symmetrisch gemodelleerd wordt. Het ART-GJR-GARCH-L(1,1,1) model wordt verkregen door de parameter restricties $\phi = \psi_{22} = 0$ op te leggen. Door dezelfde nul restrictie op η toe te voegen, wordt het ART-GARCH(1,1,1) model verkregen. Dit model bevat zowel geen leverage als feedback en is daardoor volledig symmetrisch geworden. Oftewel, zowel de volatiliteit van de volatiliteit als de volatiliteit zelf zijn symmetrisch gemodelleerd. Het RT-GARCH(1,1) model van Smetanina, 2017 wordt verkregen door de restricties $\phi = \eta = \psi_{21} = \psi_{22} = 0$ op te leggen. Het proces voor de volatiliteit van de volatiliteit is niet langer in dit model opgenomen. Door ook nog de restrictie $\psi_1 = 0$ toe te voegen, wordt het klassieke GARCH(1,1) model verkregen. De kurtosis van de conditionele kansverdeling van de returns varieert in dit geval niet meer over tijd. Als laatste model wordt het GJR-GARCH(1,1) model geëvalueerd. De GARCH specificatie daarvoor wordt verkregen door de restricties $\psi_1 = \psi_{21} = \psi_{22} = \eta = 0$ aan vergelijking (2) op te leggen. Dit model is ontwikkeld door Glosten et al., 1993. Het is een GARCH model met een asymmetrisch effect van de returns op de toekomstige volatiliteit.

Voor de modellering van de realized modellen wordt de specificatie uit Hansen et al., 2012 gevolgd. Om van de reeds genoemde modellen een realized versie te maken, moet er naast een verandering in de GARCH vergelijking ook een 3e vergelijking worden toegevoegd. Ten eerste wordt in vergelijking (2) de r_{t-1}^2 vervangen door x_{t-1}^2 . De variabele x_t^2 representeert de realized kernel op tijdstip t en deze vervangt dus de gekwadrateerde return in de GARCH vergelijking. Daarnaast voegen we een 3e vergelijking aan het model toe. De measurement vergelijking, zoals deze 3e vergelijking genoemd wordt, ziet er als volgt uit:

$$x_t^2 = \zeta + \rho \sigma_t^2 + \tau(\varepsilon_t) + u_t, \quad (3)$$

waar u_t een i.i.d. kansvariabele is, welke een $\mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$ verdeling volgt. $\tau(\varepsilon_t)$ is de leverage functie. Een veel gebruikte versie daarvoor is

$$\tau(\varepsilon_t) = \tau_1 \varepsilon_t + \tau_2 (\varepsilon_t^2 - 1). \quad (4)$$

Deze leverage functie is in staat een asymmetrisch effect van een schok op de volatiliteit te genereren.

3.2 Ongeconditioneerde volatiliteit

Als eerste geef ik een expressie voor de ongeconditioneerde verwachting van de gekwadraterde returns. Deze is

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r_t^2] &= \mathbb{E}[\sigma_t^2 \varepsilon_t^2] = \alpha + \beta \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \gamma \mathbb{E}[r_{t-1}^2] + \phi \mathbb{E}[r_{t-1}^2 \mathbb{1}_{t-1}] + \psi_1 \mathbb{E}[\varepsilon_t^4] + \psi_{21} \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2 \varepsilon_t^4] + \psi_{22} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{t-1} \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_t^4] + \eta \mathbb{E}[\mathbb{1}_t \varepsilon_t^4], \\ &= \alpha + \beta \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \gamma \mathbb{E}[r_{t-1}^2] + \phi \mathbb{E}[r_{t-1}^2 \mathbb{1}_{t-1}] + (\psi_1 + \psi_{21} \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \psi_{22} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{t-1} \sigma_{t-1}^2] + \frac{1}{2} \eta) \mathbb{E}[\varepsilon_t^4]. \end{aligned}$$

De ongeconditioneerde verwachting van σ_t^2 is als volgt:

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2] = \alpha + \beta \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \gamma \mathbb{E}[r_{t-1}^2] + \phi \mathbb{E}[r_{t-1}^2 \mathbb{1}_{t-1}] + \psi_1 + \psi_{21} \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \psi_{22} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{t-1} \sigma_{t-1}^2] + \frac{1}{2} \eta. \quad (5)$$

Hieruit volgt de relatie

$$\mathbb{E}[r_t^2] = \mathbb{E}[\sigma_t^2] + (\psi_1 + \psi_{21} \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \psi_{22} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{t-1} \sigma_{t-1}^2] + \frac{1}{2} \eta) (\mathbb{E}[\varepsilon_t^4] - 1). \quad (6)$$

Voor het berekenen van het ongeconditioneerde tweede moment zijn uitdrukkingen voor $\mathbb{E}[r_{t-1}^2 \mathbb{1}_{t-1}]$ en $\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2 \mathbb{1}_{t-1}]$ nodig. Dit wordt gedaan door eerst de geconditioneerde versie te berekenen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[r_{t+n}^2 \mathbb{1}_{t+n} | F_t] &= \mathbb{E}[\sigma_{t+n}^2 \varepsilon_{t+n}^2 \mathbb{1}_{t+n} | F_t], \\ &= \frac{1}{2} (\alpha + \beta \mathbb{E}[\sigma_{t+n-1}^2 | F_t] + \gamma \mathbb{E}[r_{t+n-1}^2 | F_t] + \phi \mathbb{E}[r_{t+n-1}^2 \mathbb{1}_{t+n-1} | F_t] + \psi_1 + \psi_{21} \mathbb{E}[\sigma_{t+n-1}^2 | F_t] \\ &\quad + \psi_{22} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{t+n-1} \sigma_{t+n-1}^2 | F_t] + \eta) \mathbb{E}[\varepsilon_{t+n}^4 | F_t], \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[r_{t+n}^2 | F_t] + \frac{1}{4} \eta \mathbb{E}[\varepsilon_{t+n}^4 | F_t], \end{aligned}$$

waar F_t de beschikbare informatie op tijdstip t is. Aangezien dit geldt voor alle $n \geq 1$ volgt dat

$$\mathbb{E}[r_t^2 \mathbb{1}_t] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[r_t^2] + \frac{1}{4} \eta \mathbb{E}[\varepsilon_t^4]. \quad (7)$$

De berekening van $\mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2 \mathbb{1}_{t-1}]$ gaat op een soortgelijke manier. Namelijk als volgt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sigma_{t+n}^2 \mathbb{1}_{t+n} | F_t] &= \frac{1}{2} (\alpha + \beta \mathbb{E}[\sigma_{t+n-1}^2 | F_t] + \gamma \mathbb{E}[r_{t+n-1}^2 | F_t] + \phi \mathbb{E}[r_{t+n-1}^2 \mathbb{1}_{t+n-1} | F_t] + \psi_1 + \psi_{21} \mathbb{E}[\sigma_{t+n-1}^2 | F_t] \\ &\quad + \psi_{22} \mathbb{E}[\sigma_{t+n-1}^2 \mathbb{1}_{t+n-1} | F_t] + \eta), \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{E}[\sigma_{t+n}^2 | F_t] + \frac{1}{4} \eta. \end{aligned}$$

Omdat dit opnieuw geldt voor alle $n \geq 1$ volgt dat

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2 \mathbb{1}_t] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[\sigma_t^2] + \frac{1}{4} \eta. \quad (8)$$

Door het substitueren van vergelijkingen (6), (7) en (8) in vergelijking (5) kan de ongeconditioneerde variantie berekend worden. Dit gaat als volgt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sigma_t^2] &= \alpha + \beta \mathbb{E}[\sigma_t^2] + \gamma(\mathbb{E}[\sigma_t^2] + (\psi_1 + \psi_{21} \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \psi_{22} \left(\frac{1}{2} \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \frac{1}{4} \eta \right) + \frac{1}{2} \eta) \kappa) \\ &\quad + \phi \left(\frac{1}{2} \mathbb{E}[r_{t-1}^2] + \frac{1}{4} \eta \mathbb{E}[\varepsilon_t^4] \right) + \psi_1 + \psi_{21} \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \psi_{22} \left(\frac{1}{2} \mathbb{E}[\sigma_{t-1}^2] + \frac{1}{4} \eta \right) + \frac{1}{2} \eta,\end{aligned}$$

waar $\kappa = \mathbb{E}[\varepsilon_t^4] - 1$. Vergelijking (6) en vervolgens vergelijking (8) moeten nog één keer in bovenstaande vergelijking gesubstitueerd worden. Daarna kan de ongeconditioneerde variantie verkregen worden. Dit geeft het volgende eindresultaat:

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{\alpha + \psi_1 + \frac{1}{2} \eta + \frac{1}{4} \phi \eta \mathbb{E}[\varepsilon_t^4] + \left(\gamma + \frac{1}{2} \phi \right) \left(\psi_1 + \frac{1}{2} \eta \right) \kappa + \frac{1}{4} \psi_{22} \eta \left(1 + \gamma \kappa + \frac{1}{2} \phi \kappa \right)}{1 - \left(\beta + \psi_{21} + \gamma + \frac{1}{2} \phi + \kappa \psi_{21} \left(\gamma + \frac{1}{2} \phi \right) + \frac{1}{2} \psi_{22} \left(1 + \kappa \left(\gamma + \frac{1}{2} \phi \right) \right) \right)}. \quad (9)$$

Zolang de noemer van vergelijking (9) positief is, is het proces stationair. Vergelijking (9) komt overeen met vergelijking (3.5) uit Ding, 2021 onder de parameter restrictie $\psi_{22} = 0$.

3.3 QML

De schattingsmethode voor het schatten van de parameters is quasi-maximum likelihood. Zowel ε_t als u_t volgen conform de aannames een normale verdeling. De specificatie van de log-likelihood functie is van Hansen et al., 2012. Zij stellen een splitsing van de log-likelihood functie voor. Dit omdat in de realized GARCH setting er sprake is van een gecombineerde verdelingsfunctie van zowel r_t als x_t . Deze gesplitste log-likelihood specificatie is als volgt:

$$\ell(r_t, x_t) = \ell(r_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left[\log(2\pi) + \log(\sigma_u^2) + \frac{u_t^2}{\sigma_u^2} \right], \quad (10)$$

waar u_t de kansvariabele uit vergelijking (3) is en σ_u^2 de variantie van u_t is. Het eerste gedeelte van vergelijking (10) geeft de log-likelihood van de returns weer, welke gebruikt kan worden voor het schatten van de parameters van de non-realized modellen. Het tweede gedeelte vervalt voor deze modellen, omdat deze modellen geen realised measure modelleren. De gehele log-likelihood functie, zoals weergegeven in vergelijking (10), wordt gebruikt voor het schatten van de parameters van de realized modellen. Voor de log-likelihood van de returns volg ik de specificatie zoals in Ding, 2021. Als eerste worden a_{t-1} en b_{t-1} gedefinieerd:

$$a_{t-1} = \psi_1 + (\psi_{21} + \psi_{22} \mathbb{1}_{t-1}) \sigma_{t-1}^2, \quad (11)$$

$$b_{t-1} = \alpha + \beta \sigma_{t-1}^2 + \gamma r_{t-1}^2 + \phi r_{t-1}^2 \mathbb{1}_{t-1}, \quad (12)$$

waar voor de realized modellen in vergelijking (12) r_{t-1} vervangen wordt door x_{t-1} . Vergelijking (11) komt onder de restrictie $\psi_{22} = 0$ overeen met vergelijking (2.11) uit Ding, 2021. Vergelijking (12) komt overeen

met vergelijking (2.12). De GARCH specificatie uit vergelijking (2) kan dus geschreven worden als

$$\sigma_t^2 = b_{t-1} + (a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) \varepsilon_t^2,$$

zoals dit ook het geval is bij de specificatie van a_{t-1} uit Ding (2021). Daarnaast worden er twee functies als volgt gedefinieerd:

$$d_1(r_t, F_{t-1}) = \sqrt{b_{t-1}^2 + 4a_{t-1}r_t^2 + 4\eta r_t^2 \mathbb{1}_t}, \quad (13)$$

$$d_2(r_t, F_{t-1}) = \text{sign}(r_t) \sqrt{\frac{d_1(r_t, F_{t-1}) - b_{t-1}}{2a_{t-1} + 2\eta \mathbb{1}_t}}, \quad \text{voor } (\psi_1, \psi_{21}, \psi_{22}, \eta) \neq 0, \quad (14)$$

$$d_2(r_t, F_{t-1}) = \frac{r_t}{\sqrt{b_{t-1}}}, \quad \text{voor } (\psi_1, \psi_{21}, \psi_{22}, \eta) = 0, \quad (15)$$

waarbij vergelijking (13) overeenkomt met vergelijking (3.15) uit Ding, 2021 en vergelijkingen (14) en (15) met vergelijking (3.16). Bij het afleiden van de filter vergelijking in de volgende sectie zal blijken dat $d_2(r_t, F_{t-1}) = \varepsilon_t$. De log-likelihood functie van de returns is vervolgens gedefinieerd als

$$\ell(r_t) = \sum_{t=1}^n \left[-\frac{1}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} d_2(r_t, F_{t-1})^2 + \log \left(\frac{r_t}{d_1(r_t, F_{t-1}) d_2(r_t, F_{t-1})} \right) \right], \quad (16)$$

wat correspondeert met vergelijking (3.23) uit Ding, 2021.

3.4 Filter

Voor het verkrijgen van een filter vergelijking moet ε_t worden uitgedrukt in r_t . Dit gaat op de volgende manier:

$$\begin{aligned} r_t &= \varepsilon_t \sigma_t = \varepsilon_t \sqrt{b_{t-1} + (a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) \varepsilon_t^2}, \\ 0 &= \varepsilon_t^2 (b_{t-1} + (a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) \varepsilon_t^2) - r_t^2, \\ &= (a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) \varepsilon_t^4 + b_{t-1} \varepsilon_t^2 - r_t^2, \end{aligned}$$

hetgeen een vierde-orde vergelijking in ε_t is. Het is tegelijkertijd een kwadratische vergelijking in ε_t^2 , zoals opgemerkt door Lange, 2021. Het uitwerken van deze vergelijking door middel van de ABC-formule geeft

$$\varepsilon_t^2 = \frac{-b_{t-1} \pm \sqrt{b_{t-1}^2 + 4(a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) r_t^2}}{2(a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t)}, \quad (17)$$

omdat ε_t^2 niet negatief is vervalst de oplossing met het minteken. Voor het verkrijgen van een expressie voor ε_t wordt hetzelfde gedaan als in Lange, 2021. Het trekken van een wortel over ε_t^2 brengt een positieve en negatieve oplossing met zich mee, maar de tekens van ε_t en r_t komen altijd overeen. Het introduceren van de $\text{sign}(r_t)$ functie geeft automatisch de oplossing met het correctie teken. Dit geeft het volgende resultaat:

$$\varepsilon_t = \text{sign}(r_t) \sqrt{\frac{\sqrt{b_{t-1}^2 + 4(a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) r_t^2} - b_{t-1}}{2(a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t)}}, \quad (18)$$

waarbij opgemerkt kan worden dat dit inderdaad hetzelfde is als $d_2(r_t, F_{t-1})$. De vergelijking van het filter wordt dan als volgt verkregen:

$$\begin{aligned}
\sigma_t^2 &= b_{t-1} + (a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) \varepsilon_t^2, \\
&= b_{t-1} + (a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) \left(\frac{\sqrt{b_{t-1}^2 + 4(a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) r_t^2} - b_{t-1}}{2(a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t)} \right), \\
&= b_{t-1} + \frac{1}{2} \left(\frac{-b_{t-1}(a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) + (a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) \sqrt{b_{t-1}^2 + 4(a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) r_t^2}}{a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t} \right), \\
&= b_{t-1} + \frac{1}{2} (-b_{t-1} + \sqrt{b_{t-1}^2 + 4(a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) r_t^2}).
\end{aligned}$$

Dit geeft de filter vergelijking:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{2} b_{t-1} + \frac{1}{2} \sqrt{b_{t-1}^2 + 4(a_{t-1} + \eta \mathbb{1}_t) r_t^2}, \quad (19)$$

welke hetzelfde is als het filter van Ding, 2021 in zijn vergelijking (3.17).

3.5 Voorspellingen

Voor alle modellen worden één-stap-vooruit volatiliteit voorspellingen gegenereerd. Deze voorspellingen worden als volgt berekend:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sigma_{t+1}^2 | F_t] &= \alpha + \beta \mathbb{E}[\sigma_t^2 | F_t] + \gamma \mathbb{E}[r_t^2 | F_t] + \phi \mathbb{E}[r_t^2 \mathbb{1}_t | F_t] + \psi_1 \mathbb{E}[\varepsilon_{t+1}^2 | F_t] + \psi_{21} \mathbb{E}[\sigma_t^2 \varepsilon_{t+1}^2 | F_t] \\
&\quad + \psi_{22} \mathbb{E}[\mathbb{1}_t \sigma_t^2 \varepsilon_{t+1}^2 | F_t] + \eta \mathbb{E}[\varepsilon_{t+1}^2 \mathbb{1}_{t+1} | F_t], \\
&= \alpha + \beta \sigma_t^2 + \gamma r_t^2 + \phi r_t^2 \mathbb{1}_t + \psi_1 + \psi_{21} \sigma_t^2 + \psi_{22} \mathbb{1}_t \sigma_t^2 + \frac{1}{2} \eta.
\end{aligned}$$

De één-stap-vooruit volatiliteit voorspelling is dus

$$\hat{\sigma}_{t+1|t} = \alpha + \psi_1 + \frac{1}{2} \eta + (\beta + \psi_{21} + \psi_{22} \mathbb{1}_t) \sigma_t^2 + (\gamma + \phi \mathbb{1}_t) r_t^2, \quad (20)$$

waar voor de realized modellen r_t in vergelijking (20) vervangen wordt door x_t .

3.6 Evaluatie

De voorspellingen worden geëvalueerd aan de hand van de SPA toets uit Hansen en Lunde, 2005. De bootstrap implementatie volgt deze zoals in Politis en Romano, 1994.² Het evalueren van de voorspellingen gebeurt in drie stappen. Ten eerste wordt voor elk model de prestatie van de realized versie met de prestatie van de non-realized versie vergeleken. Dit om te evalueren of het toevoegen van de realized kernel aan de GARCH vergelijking betere voorspellingen genereert. Vervolgens worden de voorspellingen van de modellen met een asymmetrisch proces voor de volatiliteit van de volatiliteit vergeleken met de modellen uit Ding,

²De afhankelijkheidsparameter $q=0,5$ en er worden $B=10.0000$ bootstrap herverdelingen gegenereerd, zoals in Hansen en Lunde, 2005.

2021. Hetgeen de vraag zal beantwoorden of het van toevoegende waarde is om een extra parameter voor het model voor de volatiliteit van de volatiliteit toe te voegen aan het ART-GARCH model van Ding (2021). Ten slotte wordt gekeken of er een superieur model te benoemen valt. Als loss functies worden de mean-squared error (MSE) en de QLIKE gebruikt. Deze loss functies zijn volgens Patton, 2011 de enige robuuste loss functies. Ze zijn als volgt gedefinieerd:

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\hat{\sigma}_{t|t-1}^2 - rk_t)^2, \quad (21)$$

$$\text{QLIKE} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \log(\hat{\sigma}_{t|t-1}^2) + \frac{rk_t}{\hat{\sigma}_{t|t-1}^2}, \quad (22)$$

waar N het aantal observaties is.

4 Resultaten

In deze sectie worden de resultaten gepresenteerd. De modellen worden geschat voor de S&P 500 en de DJIA, gebruikmakend van de eerste 2097 observaties. Aan de hand hiervan worden de één-stap-vooruit volatiliteit voorspellingen gegenereerd voor de periode van 2 november 2016 tot 31 december 2020. Deze voorspellingen worden geëvalueerd aan de hand van 2 loss functies: MSE en QLIKE, waarbij de realized kernel fungeert als schatter voor de daadwerkelijke volatiliteit. De sectie zal bestaan uit het presenteren en bediscussiëren van zeven hoofdresultaten.

4.1 Parameter schatting

Ten eerste is er voor non-realized modellen met een leverage noch feedback effect een asymmetrisch effect zichtbaar in het model voor de volatiliteit van de volatiliteit. De mate van asymmetrie is echter wel minder groot dan in de leverage en feedback effecten van het model voor de volatiliteit. Tabel 1 geeft de schatting van de parameters van de non-realized modellen weer. Voor zowel het AART-GARCH-LF als het AART-GARCH-L model verschillen de parameters ψ_{21} en ψ_{22} niet significant van 0. Voor het AART-GARCH model verschilt ψ_{21} daarentegen wel significant van 0 voor beide indices. ψ_{22} verschilt significant van 0 voor de DJIA en voor de S&P 500 verschilt deze voor een significantieniveau van 5% niet maar voor een significantieniveau van 10% wel significant van 0. De parameters ψ_{21} en ψ_{22} lijken dus samen de afwezigheid van een leverage parameter (η) op te vangen. Hetgeen aangeeft dat ook in het model voor de volatiliteit van de volatiliteit, indien er leverage noch feedback in het model voor de volatiliteit is opgenomen, negatieve economische schokken een sterker effect hebben dan positieve schokken. De asymmetrie in het proces voor de volatiliteit van de volatiliteit is echter wel minder sterk dan de asymmetrie in het leverage en het feedback effect. ϕ is namelijk voor elk model significant verschillend van 0, terwijl γ in die gevallen gelijk is aan 0. Een vergelijkbaar effect is zichtbaar voor η ten opzichte van ψ_1 , ψ_{21} en ψ_{22} . Dit geeft aan dat de asymmetrie

Tabel 1: Parameter schattingen van de GARCH modellen

S&P 500										
Model	α	β	γ	ϕ	ψ_1	ψ_{21}	ψ_{22}	η	AIC	BIC
AART-GARCH-LF	0,0000 (0,0079)	0,8467* (0,0197)	0,0000 (0,0207)	0,1904* (0,0347)	0,0069 (0,0056)	0,0135 (0,0190)	0,0013 (0,0189)	0,0606* (0,0139)	5382	5427
AART-GARCH-L	0,0000 (0,0103)	0,8531* (0,0222)	0,0397* (0,0195)	-	0,0000 (0,0071)	0,0420 (0,0272)	0,0203 (0,0240)	0,0848* (0,0170)	5436	5475
AART-GARCH	0,0000 (0,0097)	0,8394* (0,0216)	0,0448* (0,0212)	-	0,0193 (0,0107)	0,0627* (0,0272)	0,0548 (0,0285)	-	5487	5521
ART-GARCH-LF	0,0000 (0,0078)	0,8465* (0,0193)	0,0000 (0,0205)	0,1907* (0,0344)	0,0069 (0,0055)	0,0142 (0,0171)	-	0,0608* (0,0139)	5380	5419
ART-GARCH-L	0,0000 (0,0098)	0,8516* (0,0217)	0,0438* (0,0195)	-	0,0000 (0,0069)	0,0486* (0,0236)	-	0,0871* (0,0171)	5434	5468
ART-GARCH	0,0001 (0,0099)	0,8388* (0,0218)	0,0514* (0,0215)	-	0,0198 (0,0108)	0,0825* (0,0289)	-	-	5489	5518
RT-GARCH	0,0000 (0,0083)	0,8390* (0,0199)	0,1243* (0,0186)	-	0,0300* (0,0067)	-	-	-	5510	5533
GJR-GARCH	0,0289* (0,0038)	0,8526* (0,0130)	0,0000 (0,0146)	0,2501* (0,0305)	-	-	-	-	5474	5496
GARCH	0,0258* (0,0044)	0,8361* (0,0143)	0,1455* (0,0157)	-	-	-	-	-	5570	5587
DJIA										
AART-GARCH-LF	0,0000 (0,0072)	0,8548* (0,0183)	0,0000 (0,0200)	0,1968* (0,0351)	0,0056 (0,0056)	0,0001 (0,0180)	0,0236 (0,0182)	0,0557* (0,0132)	5288	5333
AART-GARCH-L	0,0000 (0,0088)	0,8557* (0,0203)	0,0364 (0,0188)	-	0,0000 (0,0074)	0,0298 (0,0237)	0,0433 (0,0239)	0,0876* (0,0174)	5347	5387
AART-GARCH	0,0000 (0,0091)	0,8355* (0,0213)	0,0474* (0,0220)	-	0,0189 (0,0108)	0,0601* (0,0284)	0,0631* (0,0293)	-	5401	5435
ART-GARCH-LF	0,0001 (0,0071)	0,8563* (0,0179)	0,0000 (0,0193)	0,1965* (0,0349)	0,0045 (0,0056)	0,0113 (0,0157)	-	0,0567* (0,0131)	5288	5327
ART-GARCH-L	0,0000 (0,0089)	0,8541* (0,0199)	0,0431* (0,0191)	-	0,0000 (0,0088)	0,0470* (0,0203)	-	0,0864* (0,0171)	5349	5383
ART-GARCH	0,0000 (0,0093)	0,8380* (0,0213)	0,0516* (0,0222)	-	0,0187 (0,0108)	0,0846* (0,0299)	-	-	5404	5433
RT-GARCH	0,0000 (0,0079)	0,8388 (0,0191)	0,1261 (0,0190)	-	0,0284 (0,0067)	-	-	-	5424	5446
GJR-GARCH	0,0264* (0,0035)	0,8479* (0,0131)	0,0000 (0,0155)	0,2787* (0,0326)	-	-	-	-	5364	5386
GARCH	0,0234* (0,0040)	0,8303* (0,0139)	0,1575* (0,0172)	-	-	-	-	-	5474	5491

Opmerking: Het aantal observaties dat gebruikt is voor het schatten van de parameters is 2079. De standaardfouten, welke numeriek berekend zijn, zijn gegeven tussen haakjes. * $p < 0,05$

Tabel 2: Parameter schattingen van de realized GARCH modellen

S&P 500										
Model	α	β	γ	ϕ	ψ_1	ψ_{21}	ψ_{22}	η	AIC	BIC
AART-GARCH-LF	0,0000 (0,0089)	0,7624* (0,0166)	0,0401 (0,0217)	0,2055* (0,0278)	0,0000 (0,0063)	0,0160* (0,0063)	0,0146* (0,0072)	0,1456* (0,0193)	6629	6702
AART-GARCH-L	0,0000 (0,0028)	0,6983* (0,0110)	0,1860* (0,0226)	-	0,0001 (0,0047)	0,0000 (0,0028)	0,0355* (0,0064)	0,1662* (0,0157)	6714	6782
AART-GARCH	0,0000 (0,0170)	0,5720* (0,0272)	0,3302* (0,0260)	-	0,0431* (0,0122)	0,0058 (0,0066)	0,0658* (0,0080)	-	6926	6998
ART-GARCH-LF	0,0000 (0,0319)	0,6571* (0,0681)	0,1268* (0,0372)	0,3939* (0,0782)	0,0000 (0,0353)	0,0476* (0,0148)	-	0,0315 (0,0646)	6695	6763
ART-GARCH-L	0,0000 (0,0097)	0,7809* (0,0200)	0,0973* (0,0200)	-	0,0000 (0,0061)	0,0156* (0,0036)	-	0,2434* (0,0237)	6771	6833
ART-GARCH	0,0000 (0,0250)	0,5316* (0,0356)	0,4334* (0,0361)	-	0,0003 (0,0114)	0,0598* (0,0086)	-	-	7002	7058
RT-GARCH	0,0000 (0,0296)	0,6056* (0,0371)	0,3220* (0,0322)	-	0,0826* (0,0118)	-	-	-	7078	7129
GJR-GARCH	0,0000 (0,0173)	0,6794* (0,0256)	0,2475* (0,0288)	0,3045* (0,0230)	-	-	-	-	6918	6969
GARCH	0,0000 (0,0244)	0,5650* (0,0330)	0,5411* (0,0383)	-	-	-	-	-	7168	7213
DJIA										
AART-GARCH-LF	0,0000 (0,0086)	0,8014* (0,0217)	0,0143 (0,0217)	0,1676* (0,0306)	0,0000 (0,0070)	0,0196* (0,0083)	0,0000 (0,0074)	0,1577* (0,0229)	6735	6809
AART-GARCH-L	0,0000 (0,0028)	0,8104* (0,0153)	0,0988* (0,0203)	-	0,0001 (0,0063)	0,0003 (0,0049)	0,0164* (0,0047)	0,1962* (0,0193)	6806	6874
AART-GARCH	0,0000 (0,0297)	0,5831* (0,0523)	0,3547* (0,0458)	-	0,0000 (0,0153)	0,0046 (0,0124)	0,0090 (0,0076)	-	7055	7118
ART-GARCH-LF	0,0000 (0,0391)	0,6747* (0,0668)	0,1164* (0,0289)	0,3453* (0,0161)	0,0000 (0,0077)	0,0471* (0,0145)	-	0,0197 (0,0152)	6838	6905
ART-GARCH-L	0,0000 (0,0097)	0,8085* (0,0158)	0,0670* (0,0187)	-	0,0000 (0,0097)	0,0163* (0,0035)	-	0,2258* (0,0232)	6805	6867
ART-GARCH	0,0000 (0,0278)	0,5812* (0,0500)	0,3650* (0,0444)	-	0,0000 (0,0141)	0,0524* (0,0102)	-	-	7058	7114
RT-GARCH	0,0000 (0,0535)	0,6518* (0,0491)	0,2694* (0,0309)	-	0,0708* (0,0039)	-	-	-	7117	7168
GJR-GARCH	0,0000 (0,0000)	0,7174* (0,0058)	0,1717* (0,0068)	0,2217* (0,0073)	-	-	-	-	6997	7048
GARCH	0,0000 (0,0000)	0,6238* (0,0154)	0,3762* (0,0093)	-	-	-	-	-	7203	7248

Opmerking: Het aantal observaties dat gebruikt is voor het schatten van de parameters is 2079. De standaardfouten, welke numeriek berekend zijn, zijn gegeven tussen haakjes. * $p < 0,05$

van het leverage en feedback effect in het model voor de volatiliteit relatief groter is dan de asymmetrie in het model voor de volatiliteit van de volatiliteit.

De AIC en de BIC geven aan dat het AART-GARCH-LF model geprefereerd wordt onder de non-realized modellen. Een vergelijking tussen de AART-GARCH en ART-GARCH modellen laat zien dat de stijging in de waarde van de likelihood door het opnemen van de parameter ψ_{22} in de meeste gevallen hoger is dan de penalty die de criteria toekennen voor het opnemen van een extra parameter in het model. In de andere gevallen is de stijging in de likelihood van vergelijkbaar niveau als de penalty. Het opnemen van een asymmetrisch model voor de volatiliteit van de volatiliteit in non-realized modellen heeft dus wel degelijk een toevoegende waarde ten opzichte van een symmetrisch model.

Ten tweede kunnen we concluderen dat de volatiliteit voorspellingen in een realized model sterker afhangen van de vertraagde realized measure dan dat de voorspellingen van een non-realized model afhangen van de vertraagde gekwadrateerde return. Tabel 2 geeft de parameterschattingen van de parameters in de GARCH vergelijking voor de realized modellen weer. De parameter γ is hier voor bijna alle modellen significant verschillend van 0. Daarnaast is de waarde van de parameter aanzienlijk groter dan de waarde in Tabel 1. Een ander verschil is dat voor de realized modellen zowel γ als ϕ significant van 0 verschillen. Het asymmetrische effect is wel nog steeds zichtbaar, aangezien de waarde van ϕ groter is dan van γ . De volatiliteit wordt voor realized modellen dus sterker bepaald door de vertraagde waarde van de realized kernel dan de gekwadrateerde returns voor non-realized modellen. Dit geeft aan dat de realized kernel een sterker effect heeft op de volatiliteit in de volgende periode dan de gekwadrateerde return. Daarnaast hangt de volatiliteit voor realized modellen relatief minder af van de vertraagde volatiliteit (β) ten opzichte van non-realized modellen.

In de realized modellen is daarnaast een sterkere significantie te zien van de parameter ψ_{22} ten opzichte van Tabel 1, zelfs in modellen waarin ook η is opgenomen. Er is hier wel sprake van een groter verschil tussen beide indices, ook voor de significantie van ψ_1 en ψ_{21} , hetgeen het trekken van conclusies hieruit bemoeilijkt. Het AART-GARCH-LF model wordt ook in de verzameling van realized modellen geprefereerd op basis van de AIC en de BIC. Het vergelijken van de AART-GARCH modellen ten opzichte van ART-GARCH modellen door middel van deze criteria geeft hier een nog eenduidiger beeld dan voor de non-realized modellen. De stijging in de waarde van de likelihood door het opnemen van de parameter ψ_{22} is hier in alle gevallen hoger dan de penalty die wordt toegekend door het opnemen van een extra parameter.

De schattingen van de parameters in de measurement vergelijking zijn terug te vinden in de Appendix. Opvallend punt daar is dat voor de modellen met leverage maar geen feedback de parameter τ_1 positief is. Voor alle andere modellen is de waarde van deze parameter negatief, hetgeen logisch is omdat bekend is dat een negatieve schok leidt tot een hogere volatiliteit in de volgende periode dan een positieve schok. Op het moment dat zowel leverage als feedback in het model zijn opgenomen wordt deze parameter weer negatief. Dit heeft te maken met de aanwezigheid van de schok op tijdstip t in de GARCH vergelijking, welke ook weer afhangt van de schok op $t - 1$. Als het effect op de volatiliteit op tijdstip t van de gekwadrateerde schok

Tabel 3: p -waarden van de SPA toets voor de evaluatie van realized GARCH

Model	S&P 500		DJIA	
	$PMSE$	$PQLIKE$	$PMSE$	$PQLIKE$
GARCH	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
GJR-GARCH	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
RT-GARCH	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000
ART-GARCH	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
ART-GARCH-L	0,7843	1	0,4189	1
ART-GARCH-LF	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
AART-GARCH	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
AART-GARCH-L	0,0019	0,0002	0,4182	1
AART-GARCH-LF	0,0001	0,8688	0,0000	1

Opmerking: De p -waarden corresponderen met een nulhypothese waarin de non-realized versie van het desbetreffende model minstens even goed voorspelt als de realized versie.

op t anders gemodelleerd is dan het effect van de realized measure op tijdstip $t - 1$ in termen van symmetrie en asymmetrie, wat het geval is voor modellen met een leverage maar geen feedback effect, dan volgt dat de parameter τ_1 in de measurement vergelijking voor het model van de realized measure niet langer in staat is het effect van de schok goed te modelleren. Als gevolg hiervan is de waarde van γ voor de leverage modellen aanzienlijk lager dan voor de symmetrische modellen en aanzienlijk lager dan de combinatie van γ en ϕ voor de modellen met leverage en feedback. Deze lage waarde van γ beïnvloedt de voorspellingen omdat deze nu minder afhangen van de vertraagde realized kernel. Later in deze sectie zal blijken dat dit leidt tot slechte voorspellingen van de realized modellen met een leverage maar geen feedback effect.

4.2 Evaluatie van voorspellingen

In deze sectie worden de één-stap-vooruit volatiliteit voorspellingen geëvalueerd. Deze evaluatie wordt gedaan aan de hand van de SPA toets uit Hansen en Lunde, 2005.

Ten derde concluderen we dat het vervangen van de gekwadrateerde return door de realized kernel in de GARCH vergelijking ook voor real-time modellen tot betere voorspellingen leidt. Tabel 3 presenteert de p -waarden voor de SPA toets waarin de non-realized modellen als benchmark fungeren. De nulhypothese die hier getest wordt is dat het non-realized model minstens even goed voorspelt als het realized model. Een lage p -waarde, hetgeen een verwerping van de nulhypothese betekent, geeft aan dat het realized model significant beter voorspelt dan het non-realized model. Voor 6 van de 9 modellen wordt de nulhypothese in alle gevallen verworpen, waarin we rekenen met een significantieniveau van 5%. Voor deze modellen voorspelt de realized versie dus significant beter dan de non-realized versie. Voor het AART-GARCH-L model is dit alleen voor de

Tabel 4: p -waardes van de SPA toets voor de evaluatie van AART-GARCH

Model	S&P 500		DJIA	
	p_{MSE}	p_{QLIKE}	p_{MSE}	p_{QLIKE}
(A)ART-GARCH	0,0001	0,0444	0,0013	0,0182
(A)ART-GARCH-L	0,0002	0,0001	0,0003	0,0286
(A)ART-GARCH-LF	0,0008	0,3880	0,0114	0,3598
REA-(A)ART-GARCH	0,1997	0,1610	0,0027	0,0033
REA-(A)ART-GARCH-L	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
REA-(A)ART-GARCH-LF	0,4682	0,1794	0,3572	0,0966

Opmerking: De p -waardes corresponderen met een nulhypothese waarin het ART-GARCH model minstens even goed is als de het AART-GARCH model.

S&P 500 het geval en voor het ART-GARCH-L model levert het opnemen van de realized kernel in de model specificatie in geen van de gevallen betere voorspellingen op. Deze modellen bevatten een leverage effect in de gekwadraterde return op tijdstip t , maar geen feedback effect in de realized kernel op $t - 1$. Zoals eerder benoemt wordt de parameter γ hierdoor onderschat en zowel Tabel 3 als Tabel 5 bevestigen hier dat dit tot slechte voorspellingen leidt.

Ten vierde leidt het vervangen van een symmetrisch proces voor de volatiliteit van de volatiliteit, zoals in de modellen van Ding, 2021, door een asymmetrisch model hiervoor tot betere voorspellingen in zowel non-realized als realized modellen. Tabel 4 presenteert de resultaten van de SPA toets waarin het ART-GARCH model als benchmark fungeert. Dit model wordt geëvalueerd ten opzichte van het AART-GARCH model. Een lage p -waarde betekent dus dat het AART-GARCH model beter voorspelt dan het ART-GARCH model. Oftewel, dat het toevoegen van een asymmetrische parameter in het model van de volatiliteit van de volatiliteit aan het model van Ding, 2021 tot betere voorspellingen leidt. Voor de helft van de modellen wordt de nulhypothese in alle gevallen verworpen. Voor het realized ART-GARCH model wordt alleen voor de DJIA de nulhypothese verworpen, terwijl voor de S&P 500 de prestaties van beide versies vergelijkbaar zijn. Het realized AART-GARCH-LF model presteert in geen van de gevallen beter dan de ART versie. De omgekeerde nulhypothese wordt echter voor 3 van de 4 situaties verworpen. Daarnaast presteert de AART versie van het non-realized model met leverage en feedback voor de MSE loss functie significant beter dan de ART-versie, terwijl voor de QLIKE loss functie het tegenovergestelde het geval is. Voor de modellen met zowel leverage als feedback leidt het modelleren van een asymmetrisch model voor de volatiliteit van de volatiliteit dus niet tot betere voorspellingen, in tegenstelling tot de andere modellen.

Ten vijfde leidt de combinatie van het opnemen van een realized measure in het model ten koste van de gekwadraterde return en een asymmetrisch model voor de volatiliteit van de volatiliteit tot de beste voorspellingen. Met deze combinatie van karakteristieken zijn de leverage en feedback effecten in het model voor de volatiliteit overbodig geworden. Tabel 5 geeft de waarden van de loss functies weer. Daarnaast laat

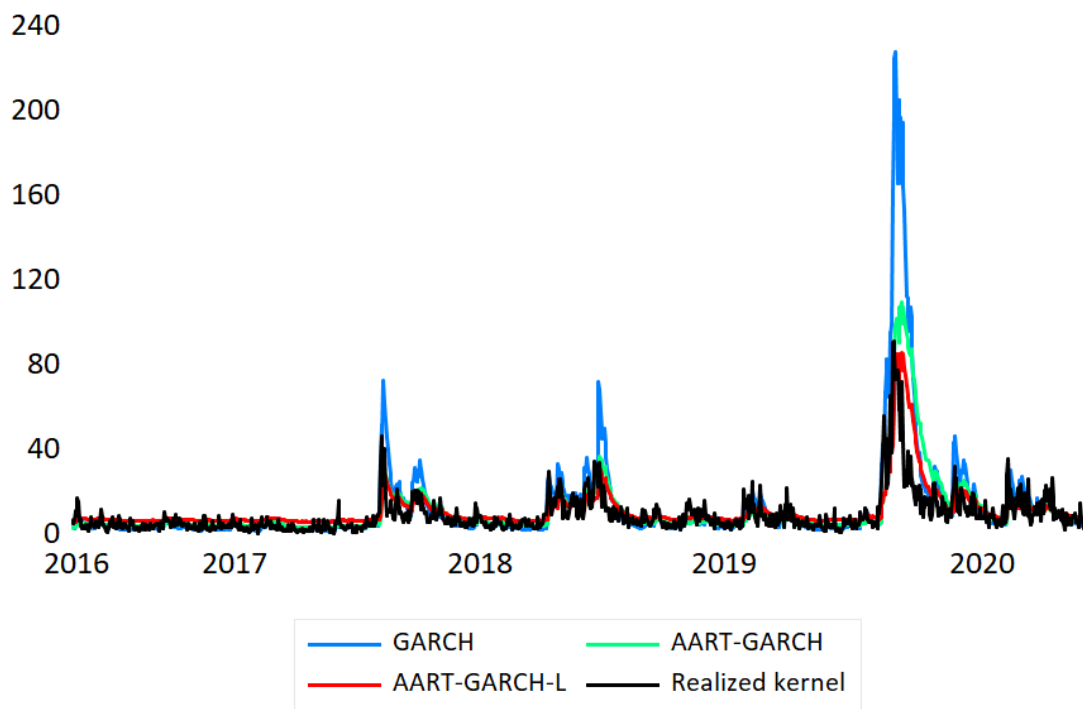
Tabel 5: MSE en QLIKE loss functies voor één-stap-vooruit volatiliteit voorspellingen

Model	S&P 500		DJIA	
	MSE	QLIKE	MSE	QLIKE
GARCH	3,0540	3,1949	3,6704	3,2834
GJR-GARCH	4,1285	3,2367	5,0677	3,3062
RT-GARCH	2,2169	3,2053	2,2534	3,2533
ART-GARCH	1,1538	3,1902	1,2339	3,2311
ART-GARCH-L	0,5681	3,1980	0,5755	3,2331
ART-GARCH-LF	2,2108	3,1952	2,6267	3,2457
AART-GARCH	1,0153	3,1883	1,1439	3,2287
AART-GARCH-L	0,5243	3,1965	0,4962	3,2318
AART-GARCH-LF	2,2065	3,1952	2,5886	3,2467
REA-GARCH	0,3763	3,1718	0,2522	3,1928*
REA-GJR-GARCH	0,4102	3,1748	0,2548	3,2033
REA-RT-GARCH	0,2729	3,1788	0,2854	3,2091
REA-ART-GARCH	0,2542*	3,1559*	0,2533	3,1930
REA-ART-GARCH-L	0,6318	3,2962	0,6970	3,3315
REA-ART-GARCH-LF	0,3454	3,1770	0,2963	3,2113
REA-AART-GARCH	0,2400*	3,1544*	0,2520*	3,1929*
REA-AART-GARCH-L	0,3338	3,1888	0,5729	3,3101
REA-AART-GARCH-LF	0,3407	3,2018	0,4270	3,2597

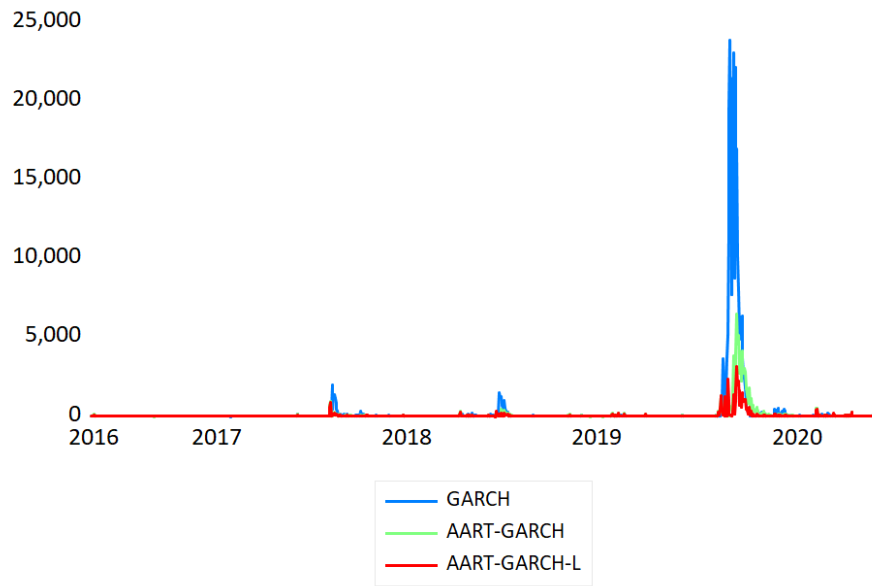
Opmerking: De dikgedrukte waardes geven aan dat het model volgens de SPA toets tot de verzameling superieure modellen behoort in de bijbehorende categorie van realized of non-realized modellen in de desbetreffende kolom. Een sterretje geeft aan dat het model behoort tot de verzameling superieure modellen onder alle modellen in de desbetreffende kolom. Bij de SPA toets wordt gerekend met een significantieniveau van 5%. De waardes van de MSE moeten met 10^2 vermenigvuldigd worden om de daadwerkelijke waardes te verkrijgen. De realized kernel is gebruikt als schatter voor de daadwerkelijke volatiliteit.

het zien welke modellen superieur zijn. Voor de non-realized modellen valt op dat de verschillen tussen de waarden van de MSE groot zijn. Hier ga ik later uitgebreider nog op in. Voor de MSE loss functie is het AART-GARCH-L model superieur in de verzameling van non-realized modellen. Het ART-GARCH-L model presteert daarnaast ook goed. Uit Tabel 1 leek een asymmetrisch model voor de volatiliteit van de volatiliteit het leverage effect echter te kunnen vervangen. De waarden van de QLIKE loss functie, in tegenstelling tot de waarden van de MSE, lijken dit nu te bevestigen.

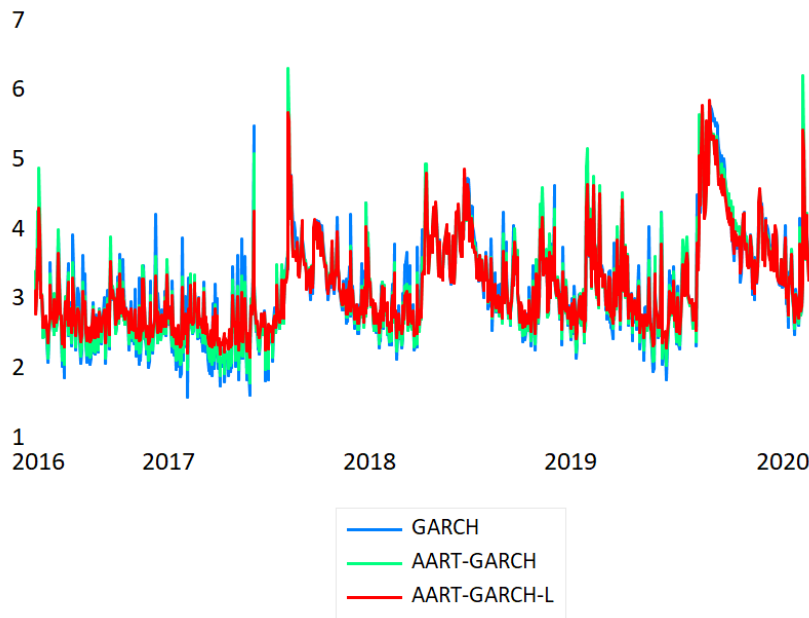
Wanneer je kijkt naar de waarden van de loss functies voor de realized modellen is meteen duidelijk dat het vervangen van de gekwadrateerde return door de realized kernel significant betere voorspellingen genereert. De afname in de loss functies is enorm. Bijna alle realized modellen voorspellen zelfs beter dan het beste non-realized model. Het superieure model is het realized AART-GARCH model, omdat deze als enige model voor elke situatie tot de verzameling superieure modellen behoort. De combinatie van een realized measure in de GARCH vergelijking en een asymmetrisch model voor de volatiliteit van de volatiliteit is dus de crux voor het genereren van de beste voorspellingen.



Figuur 3: Één-stap-vooruit volatiliteit voorspellingen voor de S&P 500, 2016-2020



Figuur 4: MSE loss functies voor één-stap-vooruit volatiliteit voorspellingen van de S&P 500, 2016-2020



Figuur 5: QLIKE loss functies voor één-stap-vooruit volatiliteit voorspellingen van de S&P 500, 2016-2020

Figuur 3 geeft een impressie van de moeite die veel modellen hebben met het voorspellen tijdens de Covid-19 piek. Dit verklaart de grote verschillen in de waarden van de MSE in Tabel 5. Aangezien de MSE

loss functie bestaat uit de gekwadrateerde voorspelfout, heeft de Covid-19 periode een immense impact op deze loss functie. Figuur 4 bevestigt dit. De waarde van de MSE wordt dus nagenoeg alleen bepaald door de prestatie tijdens de Covid-19 piek. De conclusies die volgen op basis van de MSE, moeten dus gezien worden in de context van de Covid-19 piek. De QLIKE loss functie daarentegen evalueert de relatieve fout. Oftewel, bij hoge volatiliteit wordt ook een hogere fout verwacht dan bij lagere volatiliteit. Figuur 5 laat zien dat de waarden van deze loss functie niet geheel bepaald worden door de Covid-19 piek. De prestaties op basis van de QLIKE loss functie kunnen dus meer gekoppeld worden aan de gehele periode van 2016 tot 2020.

Hieruit volgt de zesde conclusie dat het voor non-realized modellen in periodes van extreme volatiliteit, zoals in de Covid-19 piek, essentieel is een leverage effect te bevatten. Dit is een bevestiging van de conclusie die Smetanina, 2017 eerder al trok. Het AART-GARCH-L model voorspelt voor de MSE namelijk het best en daarnaast voorspelt het ART-GARCH-L model ook beter dan het AART-GARCH model, terwijl het AART-GARCH model het superieure model is op basis van de QLIKE loss functie. Oftewel, in periodes van extreme volatiliteit is het opnemen van een leverage effect essentieel voor de kwaliteit van de volatiliteit voorspellingen. In periodes van minder extreme volatiliteit lijkt het asymmetrische model voor de volatiliteit van de volatiliteit het leverage effect voor de volatiliteit echter te kunnen vervangen. Dit valt te concluderen op basis van de resultaten van de QLIKE.

Het effect van het vervangen van de gekwadrateerde return door de realized kernel is over de gehele periode zichtbaar, de waarden van de QLIKE voor de realized modellen zijn in het algemeen namelijk beter dan voor de non-realized modellen, maar de verbetering voor de MSE is wel zo innems dat te concluderen valt dat het effect hiervan nog sterker is in periodes van extreem hoge volatiliteit.

Ten zevende is de empirische fit van de AART-GARCH modellen vergelijkbaar met die van de ART-GARCH modellen. QQ-plots van de AART-GARCH en de ART-GARCH modellen worden gepresenteerd in de Appendix. Er zijn geen significantie verschillen waar te nemen tussen beide modellen met betrekking tot de empirische fit.

5 Conclusie

Het toepassen van het realized GARCH framework uit Hansen et al., 2012 op real-time modellen leidt tot een verbetering van volatiliteit voorspellingen ten opzichte van de non-realized versies van deze real-time modellen. De verbetering is het sterkst tijdens de Covid-19 piek, een periode die we kunnen typeren als één met een extreem hoge volatiliteit. Daarnaast leidt het vervangen van een symmetrisch model voor de volatiliteit van de volatiliteit uit Ding, 2021 door een asymmetrisch model tot betere voorspellingen voor zowel de realized als de non-realized versie van het model. De combinatie van een realized measure in de model specificatie en een asymmetrisch proces voor de volatiliteit van de volatiliteit leidt tot de beste voorspellingen. Deze combinatie vervangt de leverage en feedback effecten in het model voor de volatiliteit.

Voor verder onderzoek is het interessant de gekwadrateerde return op tijdstip t , oftewel de real-time

component, ook te vervangen door een realized measure in plaats van alleen de gekwadrateerde return op tijdstip $t - 1$ te vervangen. Dit zou wellicht de problemen die er ontstaan bij het toepassen van het realized framework uit Hansen et al., 2012 op een real-time model met leverage maar geen feedback kunnen verhelpen.

References

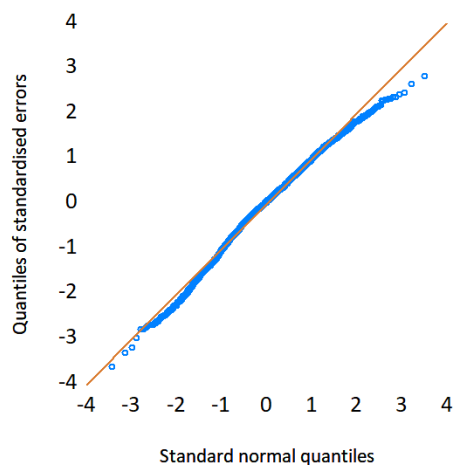
- Barndorff-Nielsen, O., Hansen, P. R., Lunde, A., and Shephard, N. (2009). Realized kernels in practice: trades and quotes. *The Econometrics Journal* 12: 1-32.
- Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31: 307-327.
- Ding, Y. (2021). Augmented Real-Time GARCH: A Joint Model for Returns, Volatility and Volatility of Volatility. *Cambridge Working Papers in Economics*: 2112.
- Engle, R. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica* 50: 987-1007.
- Glosten, L., Jagannathan, R., and Runkle, D. (1993). On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *Journal of Finance* 48: 1779-1802.
- Hansen, P. and Huang, Z. (2016). Exponential GARCH Modeling with Realized Measures of Volatility. *Journal of Business & Economic Statistics* 34: 269-287.
- Hansen, P., Huang, Z., and Shek, H. (2012). Realized GARCH: A Joint Model for Returns and Realized Measures of Volatility. *Journal of Applied Econometrics* 27: 877-906.
- Hansen, P. and Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: does anything beat a GARCH(1,1)? *Journal of Applied Econometrics* 20: 873-889.
- Lange, R.-J. (2021). A short explanation of RT-GARCH (with proofs).
- Patton, A. (2011). Volatility Forecast Evaluation and Comparison using Imperfect Volatility Proxies. *Journal of Econometrics* 160: 246-256.
- Politis, D. N. and Romano, J. P. (1994). The stationary bootstrap. *Journal of the American Statistical Association* 89: 1303-1313.
- Smetanina, E. (2017). Real-Time GARCH. *Journal of Financial Econometrics* 15(4): 561-601.

Appendix

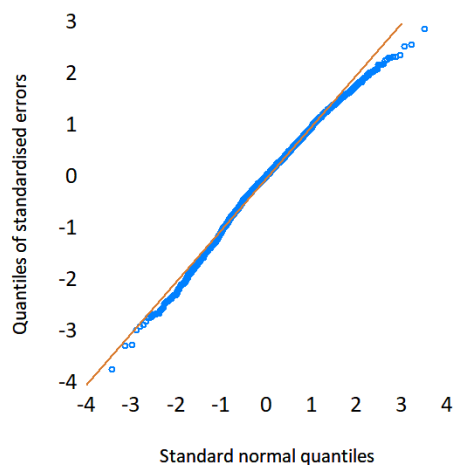
Tabel 6: Parameter schattingen van de measurement vergelijking van de realized GARCH modellen

S&P 500					
	ζ	ρ	τ_1	τ_2	σ_u^2
AART-GARCH-LF	0,3064 (0,0186)	0,6004 (0,0253)	-0,0125 (0,0085)	0,0902 (0,0062)	0,1002 (0,0032)
AART-GARCH-L	0,2473 (0,0163)	0,7029 (0,0267)	0,0104 (0,0084)	0,0744 (0,0060)	0,1001 (0,0031)
AART-GARCH	0,2779 (0,0261)	0,6559 (0,0220)	-0,0401 (0,0073)	0,0865 (0,0056)	0,1093 (0,0035)
ART-GARCH-LF	0,3366 (0,0291)	0,5132 (0,0254)	-0,0394 (0,121)	0,1103 (0,0076)	0,1027 (0,0034)
ART-GARCH-L	0,2613 (0,0225)	0,6440 (0,0304)	0,0236 (0,0092)	0,0781 (0,0065)	0,1034 (0,0033)
ART-GARCH	0,3056 (0,0260)	0,5774 (0,0275)	-0,0371 (0,0076)	0,1021 (0,0068)	0,1154 (0,0036)
RT-GARCH	0,1614 (0,0471)	0,7683 (0,0398)	-0,0362 (0,0075)	0,0867 (0,0083)	0,1133 (0,0035)
GJR-GARCH	0,1953 (0,0293)	0,6248 (0,0282)	-0,0310 (0,0074)	0,1171 (0,0056)	0,1062 (0,0033)
GARCH	0,1891 (0,0292)	0,6303 (0,0281)	-0,0255 (0,0077)	0,1265 (0,0060)	0,1172 (0,0037)
DJIA					
AART-GARCH-LF	0,3266 (0,0200)	0,6213 (0,0290)	-0,0077 (0,0098)	0,0886 (0,0069)	0,1109 (0,0035)
AART-GARCH-L	0,2674 (0,0162)	0,6571 (0,0250)	0,0117 (0,0087)	0,0885 (0,0067)	0,1101 (0,0035)
AART-GARCH	0,3235 (0,0276)	0,6053 (0,0250)	-0,0382 (0,0079)	0,1064 (0,0073)	0,1237 (0,0040)
ART-GARCH-LF	0,3730 (0,0143)	0,5224 (0,0234)	-0,0424 (0,0068)	0,1119 (0,0050)	0,1161 (0,0035)
ART-GARCH-L	0,2868 (0,0284)	0,6691 (0,0385)	0,0211 (0,0100)	0,0767 (0,0074)	0,1116 (0,0035)
ART-GARCH	0,3207 (0,0272)	0,6088 (0,0250)	-0,0380 (0,0079)	0,1059 (0,0072)	0,1238 (0,0039)
RT-GARCH	0,1723 (0,0970)	0,8045 (0,0839)	-0,0374 (0,0075)	0,0887 (0,0082)	0,1210 (0,0038)
GJR-GARCH	0,2079 (0,0127)	0,7526 (0,0148)	-0,0332 (0,0072)	0,1026 (0,0041)	0,1163 (0,0036)
GARCH	0,1749 (0,0139)	0,7867 (0,0174)	-0,0303 (0,0073)	0,1082 (0,0043)	0,1245 (0,0039)

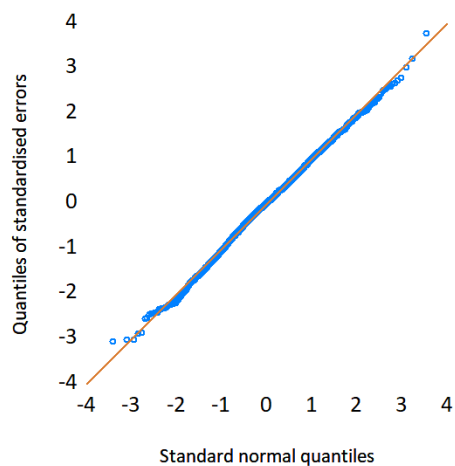
Opmerking: Het aantal observaties dat gebruikt is voor het schatten van de parameters is 2079.
De standaardfouten, welke numeriek berekend zijn, zijn gegeven tussen haakjes.



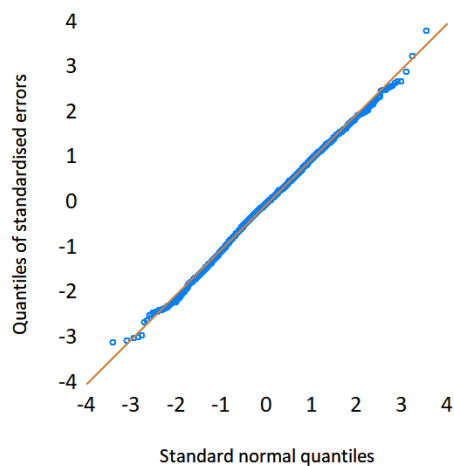
ART-GARCH



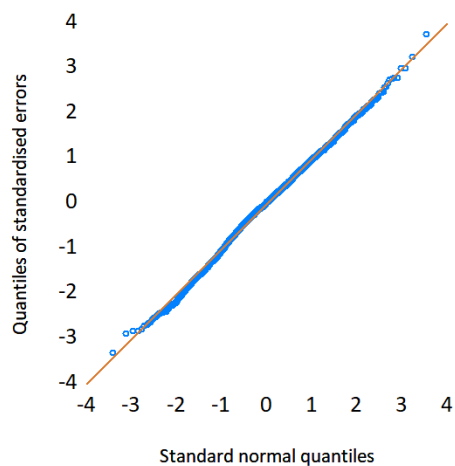
AART-GARCH



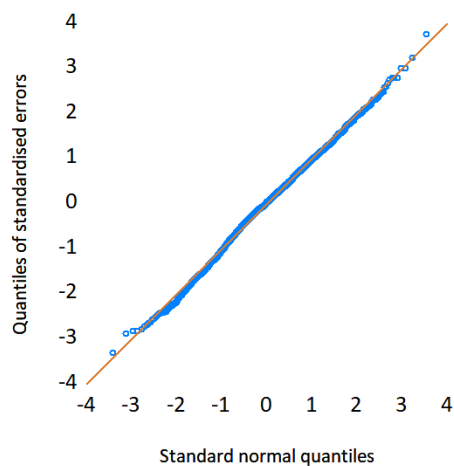
ART-GJR-GARCH-L



AART-GJR-GARCH-L

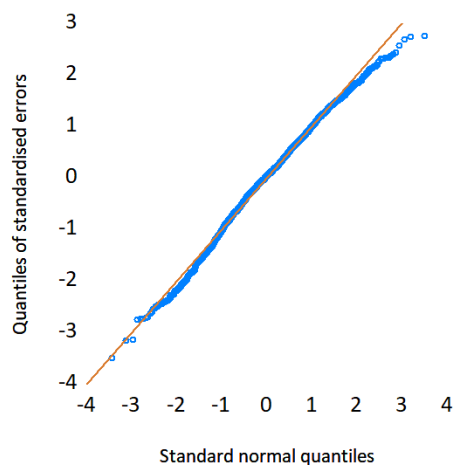


ART-GJR-GARCH-LF

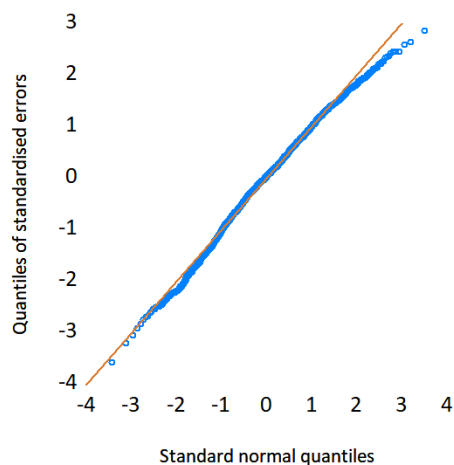


AART-GJR-GARCH-LF

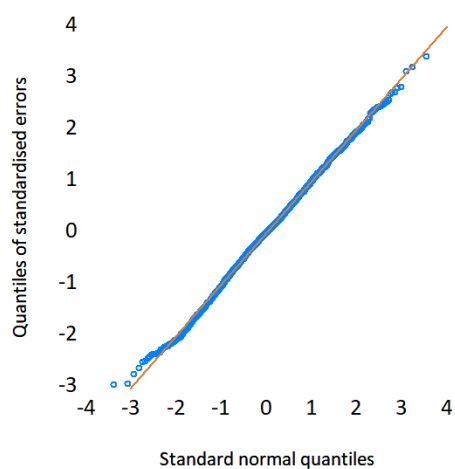
Figuur 6: QQ plots van de gestandaardiseerde returns voor de S&P 500 index



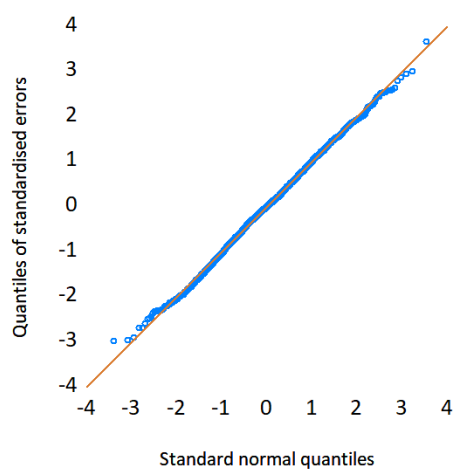
ART-GARCH



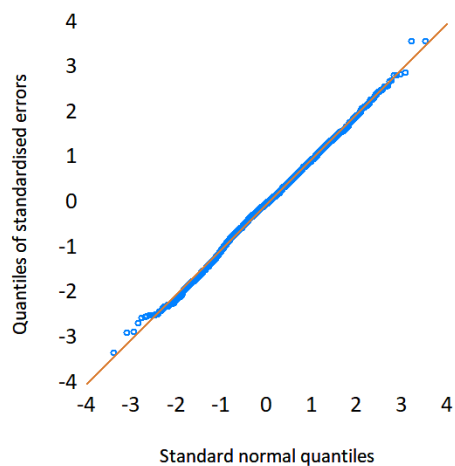
AART-GARCH



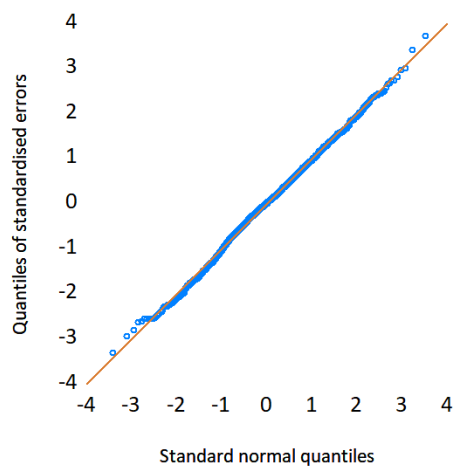
ART-GJR-GARCH-L



AART-GJR-GARCH-L

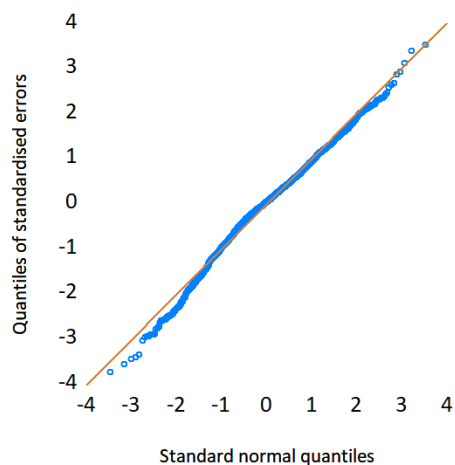


ART-GJR-GARCH-LF

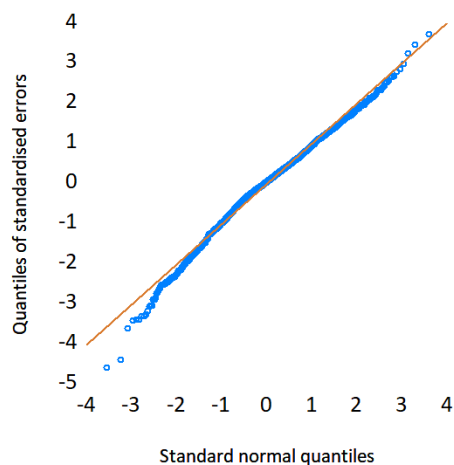


AART-GJR-GARCH-LF

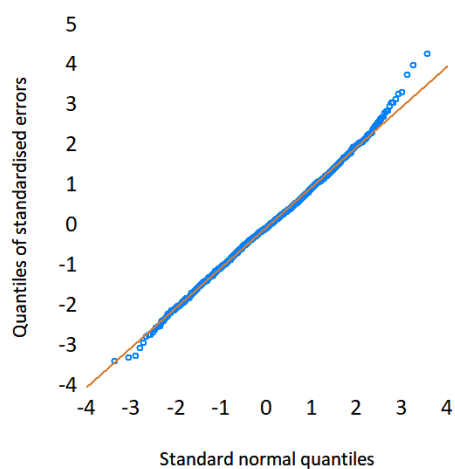
Figuur 7: QQ plots van de gestandaardiseerde returns voor de DJIA



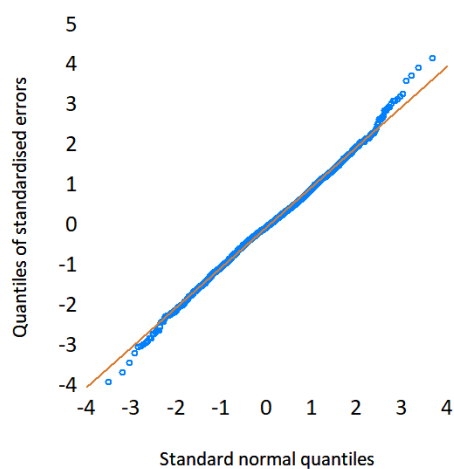
Realized ART-GARCH



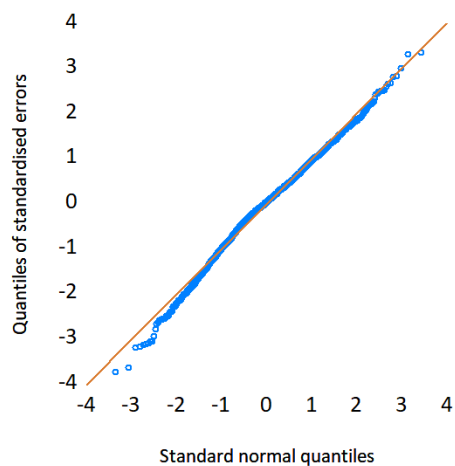
Realized AART-GARCH



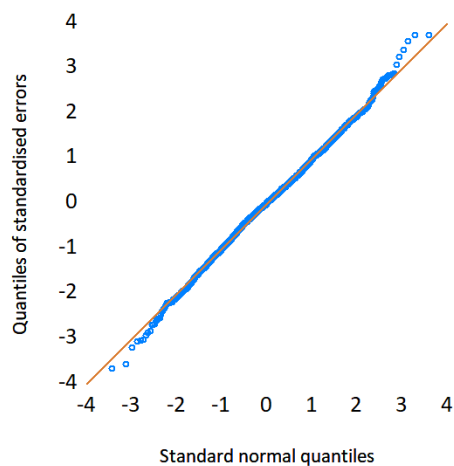
Realized ART-GJR-GARCH-L



Realized AART-GJR-GARCH-L

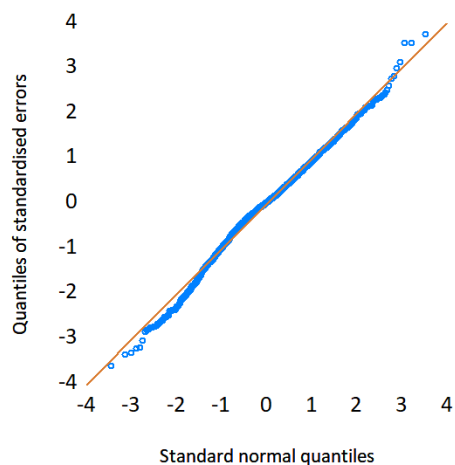


Realized ART-GJR-GARCH-LF

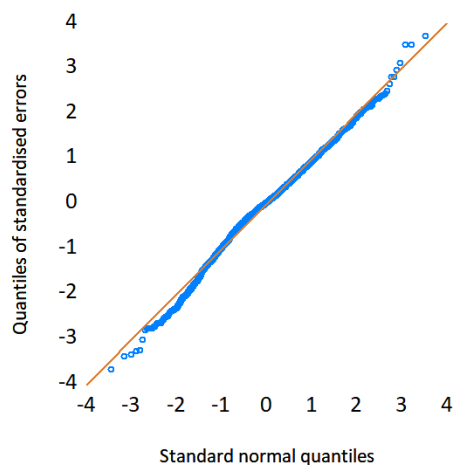


Realized AART-GJR-GARCH-LF

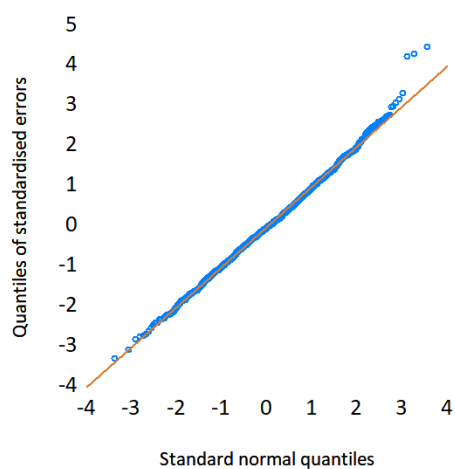
Figuur 8: QQ plots van de gestandaardiseerde returns voor de S&P 500 index



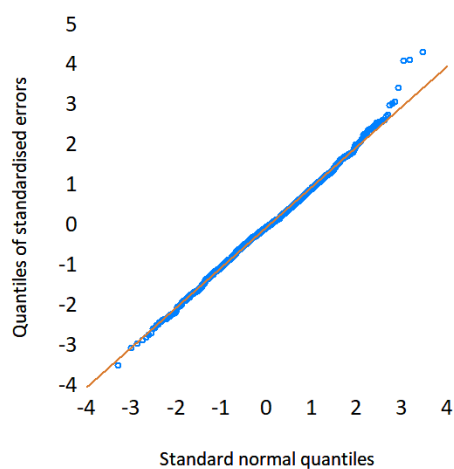
Realized ART-GARCH



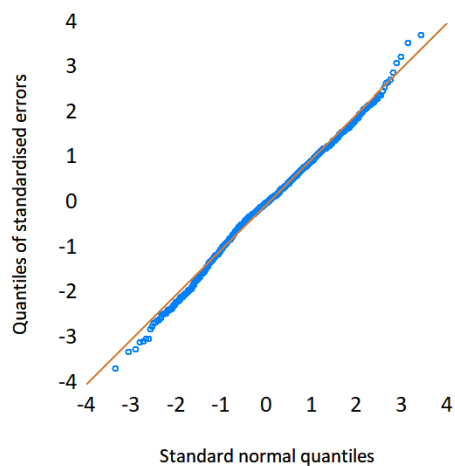
Realized AART-GARCH



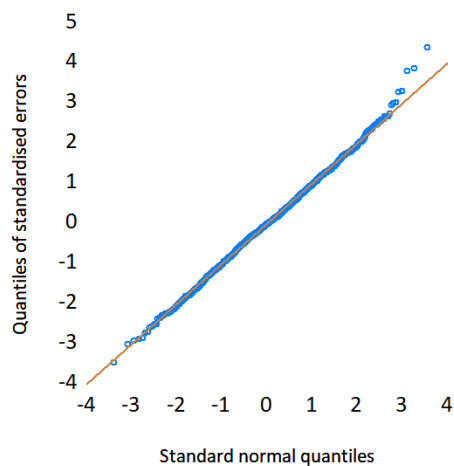
Realized ART-GJR-GARCH-L



Realized AART-GJR-GARCH-L



Realized ART-GJR-GARCH-LF



Realized AART-GJR-GARCH-LF

Figuur 9: QQ plots van de gestandaardiseerde returns voor de DJIA